ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Ταχείς Αλγόριθμοι για την Εξέλιξη Γεωδαιτικών Ενεργών Περιγραμμάτων με Εφαρμογές στην Όραση Υπολογιστών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Γεωργίου Ν. Παπανδρέου

Επιβλέπων: Πέτρος Α. Μαραγκός
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2003

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Ταχείς Αλγόριθμοι για την Εξέλιξη Γεωδαιτικών Ενεργών Περιγραμμάτων με Εφαρμογές στην Όραση Υπολογιστών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Γεωργίου Ν. Παπανδρέου

Επιβλέπων: Πέτρος Α. Μαραγκός
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή στις 23 Οκτωβρίου 2003.

....	....	....
Πέτρος Μαραγκός Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Γεώργιος Παπακωνσταντίνου Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Κωνσταντίνος Τζαφέστας Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2003.

....

Γεώργιος Ν. Παπανδρέου
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

γεωδαισία(η): κλάδος των εφαρμοσμένων μαθηματικών που ασχολείται με τη μέτρηση του εμβαδού και του σχήματος μεγάλων εκτάσεων μιας χώρας, τον ακριβή προσδιορισμό των γεωγραφικών συντεταγμένων και την καμπυλότητα, το σχήμα και τις διαστάσεις της γήινης σφαίρας.
γεωδαίτης (ο), **γεωδαιτικός**, -ή, ό, **γεωδαιτικώς** επίρρημα.
[ΕΤΥΜ. αρχαία λέξη < γεω- (γη) + -δαισία < δαίομαι "διαμοιράζω, χωρίζω". Παράβαλε συνδαιτημόνας, πανδαισία.]
(Από το Λεξικό της Νέας Ελληνικής του Γ. Μπαμπινιώτη)

Περίληψη

Στο επίκεντρο αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η ταχεία επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων που βρίσκουν εφαρμογή στην Όραση Υπολογιστών, με έμφαση στην εξίσωση εξέλιξης των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων και στην εξίσωση ανισοτροπικής διάχυσης θερμότητας. Μετά από μια σύντομη ανασκόπηση των μοντέλων των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων και χώρων κλίμακας από ανισοτροπική διάχυση θερμότητας, εξετάζουμε βασικές μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης για μερικές διαφορικές εξισώσεις, με έμφαση στην ανάλυση ευστάθειας με τη μέθοδο του πίνακα και στα αριθμητικά σχήματα που χρησιμοποιούνται ευρέως για την εξέλιξη επιπεδοσυνόλων. Το προκαταρτικό μέρος της εργασίας συμπληρώνεται με την παρουσίαση της μεθόδου πολλαπλών πλεγμάτων για την αποδοτική επίλυση αραιών γραμμικών συστημάτων. Οι ιδέες αυτές μας οδηγούν σε νέους ταχείς αλγορίθμους για την εξίσωση εξέλιξης των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων. Οι αλγόριθμοι αυτοί προκύπτουν με χρήση implicit αριθμητικών σχημάτων, είναι ευσταθείς δίχως περιορισμούς στο χρονικό βήμα και έχουν πρακτικά $O(N)$ πολυπλοκότητα, χάρη στη χρήση μεθόδων πολλαπλών πλεγμάτων για την επίλυση των γραμμικών συστημάτων που προκύπτουν. Η θεωρητική ανάλυση των προτεινόμενων αλγορίθμων οδηγεί στην ανακάλυψη μιας σημαντικής συσχέτισης του μοντέλου των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων με μεθόδους τομής γράφων που χρησιμοποιούνται τα τελευταία χρόνια στην Όραση Υπολογιστών για κατάτμηση εικόνων.

Λέξεις–κλειδιά

όραση υπολογιστών, επεξεργασία εικόνας, γεωδαιτικά ενεργά περιγράμματα, μέθοδοι πολλαπλών πλεγμάτων, ανισοτροπική διάχυση, τομές γράφων, χώροι κλίμακας, επιπεδοσύνολα, μερικές διαφορικές εξισώσεις, ανάλυση ευστάθειας, γραμμικά συστήματα, ταχείς αλγόριθμοι

Abstract

This diploma thesis deals with the fast solution of partial differential equations often encountered in computer vision. Emphasis is put on the equation of geodesic active contours evolution and on the anisotropic diffusion equation. After a brief review of the computer vision models connected with these equations, namely the geodesic active contours and the diffusion scale-space models, we present some basic tools from the numerical analysis of partial differential equations, with emphasis on matrix stability analysis and numerical schemes for the evolution of level sets. The description of multigrid methods for the effective solution of sparse systems of algebraic equations concludes the preliminary part of the document. These ideas lead to new fast algorithms for the solution of the geodesic active contours evolution equation. These algorithms employ time–implicit numerical schemes, are unconditionally stable as far as the timestep is concerned and their complexity is practically $O(N)$ with respect to the number of pixels of the image, thanks to the application of multigrid methods for the solution of the occurring linear systems. The theoretical analysis of the proposed algorithms leads to the discovery of an important interconnection between the geodesic active contour model and graph cut methods recently introduced in computer vision with application to the problem of image segmentation.

Keywords

computer vision, image processing, geodesic active contours, multigrid, anisotropic diffusion, graph cuts, scale spaces, level sets, partial differential equations, stability analysis, linear systems, fast algorithms

Πρόλογος

Λίγα λόγια για την Όραση Υπολογιστών

Η Όραση Υπολογιστών ασχολείται με την εξαγωγή χρήσιμων πληροφοριών από εικόνες ή ακολουθίες εικόνων. Απώτερος στόχος αυτών που εργάζονται στην περιοχή είναι η κατασκευή συστημάτων τα οποία θα αντιλαμβάνονται τον ορατό κόσμο με ανθρώπινη ευφυία. Αν και η έρευνα στην Όραση Υπολογιστών έχει κάνει τα τελευταία χρόνια σημαντική πρόοδο, απέχουμε ακόμα πάρα πολύ από την εκπλήρωση αυτού του οράματος.

Η Όραση Υπολογιστών (δες π.χ. [51] και [26]) έκανε τα πρώτα της βήματα τη δεκαετία του ΄60, ως ένα παρακλάδι της Τεχνητής Νοημοσύνης. Μια από τις πρώτες εφαρμογές της ήταν η ανάλυση δυαδικών εικόνων με τη βοήθεια απλών μεθόδων αναγνώρισης προτύπων και έχοντας ως στόχο την οπτική αναγνώριση χαρακτήρων. Γρήγορα πάντως έγινε αντιληπτό ότι η εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων από συστήματα μηχανικής όρασης είναι μια εξαιρετικά δύσκολη υπόθεση, εξαιτίας της πολύ μεγάλης πολυπλοκότητας που εμφανίζουν οι εικόνες του φυσικού κόσμου. Δεν είναι τυχαίο ότι μερικά από τα πιο επιτυχημένα συστήματα μηχανικής όρασης επεξεργάζονται εικόνες που προέρχονται από πολύ συγκεκριμένα πεδία εφαρμογών, μειώνοντας την πολυπλοκότητα με το να περιορίζουν τις κλάσεις των εικόνων που δέχεται το σύστημα στην είσοδό του.

Προκειμένου να αντιμετωπιστεί με επιτυχία το τελικό πρόβλημα της εξαγωγής συμπερασμάτων από εικόνες οι ερευνητές γρήγορα κατάλαβαν ότι έπρεπε να κινηθούν συστηματικά, διασπώντας το συνολικό πρόβλημα σε υποπροβλήματα υψηλού επιπέδου. Αυτά με τη σειρά τους αποσυντέθηκαν σε υποπροβλήματα μεσαίου επιπέδου τα οποία, τέλος, διασπάστηκαν σε προβλήματα χαμηλού επιπέδου[1]. Ένας σύντομος κατάλογος επιμέρους προβλημάτων της Όρασης Υπολογιστών, από τα πιο υψηλού στα πιο χαμηλού επιπέδου, είναι ο εξής:

- Μοντελοποίηση φυσικών και τεχνητών σχημάτων.

[1]Η διαμέριση προβλημάτων σε υποπροβλήματα είναι η πιο γενική μέθοδος για την αντιμετώπιση της πολυπλοκότητας στο σχεδιασμό συστημάτων. Μια άλλη περιοχή εφαρμογής της είναι π.χ. η ανάπτυξη λογισμικού.

- Αναγνώριση/κατηγοριοποίηση αντικειμένων.
- Κατάτμηση εικόνων σε ομογενείς περιοχές.
- Εκτίμηση τρισδιάστατου σχήματος από την κίνηση ή/και τη σκίαση.
- Εντοπισμός (tracking) και εκτίμηση ταχύτητας κινούμενων αντικειμένων.
- Στερέοψη.
- Ανάλυση και σύνθεση υφής.
- Ανίχνευση ακμών.
- Ομαλοποίηση εικόνων και ανάλυση σε πολλαπλές κλίμακες.
- Μοντελοποίηση και ανάλυση χρώματος.
- Σχηματισμός εικόνων από τον άνθρωπο και τη μηχανή.

Οι εφαρμογές της Όρασης Υπολογιστών είναι πολλές και εντυπωσιακές, αφού η εικόνα περιέχει μεγάλα ποσά πληροφορίας που μπορούν να αξιοποιηθούν ποικιλότροπα από τις μηχανές. Μέθοδοι μηχανικής όρασης βρίσκουν για παράδειγμα εφαρμογή σε συστήματα ιατρικής απεικόνισης: Με τη βοήθεια λογισμικού μπορεί κανείς να βελτιώσει την ποιότητα ιατρικών εικόνων, να διαγνώσει μια ασθένεια και να μετρήσει κάποια χαρακτηριστικά της και να βοηθήσει το γιατρό να βγάλει τη γνωμάτευση πιο εύκολα και σωστά. Μια άλλη εφαρμογή είναι στην αυτόματη επιτήρηση χώρων για λόγους ασφάλειας ή έλεγχο της κίνησης σε αυτοκινητόδρομους. Τεχνικές Όρασης Υπολογιστών χρησιμοποιούνται και στην επεξεργασία δορυφορικών εικόνων, για στρατιωτικούς και πολιτικούς σκοπούς. Επίσης έχουμε εφαρμογές στην περιοχή της καθοδήγησης ρομπότ και στο χώρο της διασκέδασης (computer games, special effects). Σύγχρονες εφαρμογές είναι ακόμα η διευκόλυνση της επικοινωνίας ανθρώπου-μηχανής (απευθείας αναγνώριση των κινήσεων του χρήστη αλλά και χρήση της πληροφορίας από την εικόνα για ευκολότερη αναγνώριση της φωνής), καθώς και η ταξινόμηση και αποθήκευση των εικόνων σε βιβλιοθήκες που θα επιτρέπουν εύκολη αναζήτηση, όπως γίνεται σήμερα με τα κείμενα. Όλες αυτές οι εφαρμογές (και πολλές άλλες) γίνονται σήμερα σιγά-σιγά εφικτές, καθώς η λήψη ψηφιακής εικόνας και βίντεο γίνεται προσιτή στον καθένα, η υπολογιστική ισχύς αυξάνει με γεωμετρικούς ρυθμούς, ακολουθώντας το νόμο του Moore, και η έρευνα στην περιοχή προοδεύει συνεχώς.

Εξαιτίας της πολυπλοκότητας του αντικειμένου της και του γεγονότος ότι είναι μια έντονα αναπτυσσόμενη περιοχή, η Όραση Υπολογιστών χρησιμοποιεί μια πληθώρα μεθόδων και εργαλείων, δανεισμένων από πολλές και διαφορετικές μεταξύ τους επιστημονικές περιοχές. Έτσι η έρευνα στο χώρο της μηχανικής όρασης έχει δεχτεί επιρροές από κλάδους όπως:

- *Ψυχοφυσιολογία*. Εδώ η έμφαση βρίσκεται στην κατανόηση των μηχανισμών δημιουργίας οπτικών ερεθισμάτων στον ανθρώπινο εγκέφαλο [43]. Μια από τις περιοχές της Ψυχολογίας με τη μεγαλύτερη επιρροή είναι η Σχολή του *Gestalt* [47], που προσπαθεί να ανακαλύψει γενικούς κανόνες που διέπουν την αντίληψη του ανθρώπινου συστήματος όρασης.

- *Στατιστική*. Στατιστικές μέθοδοι, τόσο για την ανάλυση, όσο και για τη σύνθεση εικόνων έχουν εισαχθεί τα τελευταία χρόνια στην Όραση Υπολογιστών [34]. Χρησιμοποιώντας *Bayesian* μεθόδους είναι δυνατόν να επιτύχει κανείς την εκμάθηση μοντέλων εικόνας με βέλτιστο τρόπο [35]. Η υπολογιστική επίλυση των μοντέλων αυτών γίνεται με μεθόδους στοχαστικής βελτιστοποίησης, δανεισμένες από τη Στατιστική Φυσική [28].

- *Μαθηματική Μορφολογία*. Η μαθηματική μορφολογία [65] είναι μια μη-γραμμική γεωμετρική μεθοδολογία που χρησιμοποιείται στην ανάλυση εικόνων και στην όραση υπολογιστών. Βασίζεται στη θεωρία συνόλων, στην άλγεβρα πλεγμάτων (lattice algebra), στην κυρτή ανάλυση (convex analysis), στη στοχαστική και ολοκληρωτική γεωμετρία. Οι βασικοί μορφολογικοί τελεστές είναι μη-γραμμικά φίλτρα τύπου sup/inf/rank. Η μαθηματική μορφολογία έχει επίσης ισχυρούς δεσμούς με μεθόδους επιπεδοσυνόλων και γεωμετρικών μερικών διαφορικών εξισώσεων. Είναι ιδιαίτερα κατάλληλη για εφαρμογές όπως ο εντοπισμός γεωμετρικών χαρακτηριστικών σε πολλαπλές κλίμακες, ανάλυση μεγέθους και σχήματος, γεωμετρικό, μη-γραμμικό φιλτράρισμα και αποκατάσταση, κωδικοποίηση σε πολλαπλές κλίμακες, κατάτμηση εικόνων και αναγνώριση αντικειμένων.

- *Θεωρία Γράφων*. Μέθοδοι των διακριτών μαθηματικών και κυρίως της θεωρίας γράφων έχουν βρει τα τελευταία χρόνια εφαρμογή σε προβλήματα της Όρασης Υπολογιστών, όπως π.χ. η κατάτμηση εικόνων σε ομογενείς περιοχές [68].

- *Μαθηματική Φυσική*. Εργαλεία της μαθηματικής φυσικής, όπως οι Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (PDEs), η Συναρτησιακή Ανάλυση και ο Λογισμός των Μεταβολών έχουν μια μακρά παράδοση στην επιτυχή μοντελοποίηση φυσικών φαινομένων. Τα ίδια εργαλεία βρίσκουν ευρεία εφαρμογή σε προβλήματα της Όρασης Υπολογιστών, όπως η ανάλυση εικόνων σε πολλαπλές κλίμακες [13], η μοντελοποίηση σχημάτων [54], οι ενεργές καμπύλες [44] και τα γεωδαιτικά ενεργά περιγράμματα [14], όπως και η διαφορική μορφολογία [49].

Το περιεχόμενο της παρούσας εργασίας

Η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία ξεκίνησε ως μια προσπάθεια για την κατασκευή ενός συστήματος μηχανικής όρασης για το tracking ενός ανθρώπινου χεριού με μεθόδους γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων. Σκοπός αυτού του συστήματος θα ήταν η καθοδήγηση ενός ρομπότ με αναγνώριση των χειρονομιών του χειριστή του. Γρήγορα όμως έγινε αντιληπτό ότι, προκειμένου το σύστημα να λειτουργεί γρήγορα, δεν αρκούσε η χρήση απλών αριθμητικών σχημάτων για την εξέλιξη των περιγραμμάτων, αλλά θα έπρεπε να χρησιμοποιηθούν κάποια πιο σύνθετα αριθμητικά σχήματα για την επίλυση PDEs που είχαν εισαχθεί μόλις τα τελευταία χρόνια στην Όραση Υπολογιστών, καθώς και κάποια σύγχρονα εργαλεία από το χώρο της Αριθμητικής Ανάλυσης, ακόμα σχετικά άγνωστα στην κοινότητα της μηχανικής όρασης. Έτσι το επίκεντρο της διπλωματικής εργασίας μετατοπίστηκε από το συγκεκριμένο ρομποτικό σύστημα στη θεωρητική ανάλυση και εφαρμογή αποδοτικών αριθμητικών σχημάτων για την επίλυση PDEs που βρίσκουν εφαρμογή στην Όραση Υπολογιστών, με έμφαση στο μοντέλο των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων και στο μοντέλο διάχυσης θερμότητας που, όπως θα δούμε, συνδέονται στενά μεταξύ τους. Όπως εύκολα μπορεί να συμπεράνει κανείς, μεγάλο μέρος της δουλειάς κατέλαβε και η πρακτική υλοποίηση στον υπολογιστή των αλγορίθμων που θα παρουσιαστούν.

Το κείμενο είναι οργανωμένο σε έξι κεφάλαια. Έχει γίνει σημαντική προσπάθεια ώστε η παρουσίαση να είναι σχετικά αυτόνομη, όσο βέβαια αυτό μπορεί να επιτευχθεί στα πλαίσια μιας διπλωματικής εργασίας. Τα τρία πρώτα προετοιμάζουν τον αναγνώστη για το κυρίως μέρος αυτής της εργασίας, που είναι τα Κεφάλαια 4 και 5.

Στο **Κεφάλαιο 1** παρουσιάζονται τα δύο μοντέλα της Όρασης Υπολογιστών που θα μας απασχολήσουν σε αυτή την εργασία: η ανάλυση εικόνων σε χώρους κλίμακας με την εξίσωση ανισοτροπικής διάχυσης και τα γεωδαιτικά ενεργά περιγράμματα με χρήση τεχνικών επιπεδοσυνόλων. Και τα δύο αυτά μοντέλα βασίζονται σε μεθόδους Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων. Σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να καταδειχτεί η χρησιμότητα αυτών των μοντέλων στην επίλυση προβλημάτων μηχανικής όρασης και να εξοικειωθεί ο αναγνώστης με τις βασικές τους ιδιότητες, ώστε να είναι προετοιμασμένος για τη μελέτη των αριθμητικών μεθόδων για την επίλυσή τους που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια.

Το **Κεφάλαιο 2** εισάγει τον αναγνώστη στην αριθμητική επίλυση PDEs. Καταρχήν παρουσιάζονται κάποιες βασικές έννοιες από την αριθμητική ανάλυση PDEs. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται σε μεθόδους για τη μελέτη ευστάθειας αριθμητικών σχημάτων για PDEs. Κατόπιν παρουσιάζονται κάποιες βασικές αριθμητικές μέθοδοι για την εξέλιξη καμπυλών με επιπεδοσύνολα και περιγράφονται οι αδυναμίες τους.

Στο **Κεφάλαιο 3** γίνεται αναφορά σε μεθόδους που χρησιμοποιούνται για την αποδοτική επίλυση ιδιαίτερα μεγάλων αλγεβρικών συστημάτων εξισώσεων, τα οποία προκύπτουν κατά την αριθμητική επίλυση PDEs. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στη χρήση μεθόδων πολλαπλών πλεγμάτων (multigrid methods), που βρίσκονται στον πυρήνα των γρήγορων αλγορίθμων των επόμενων κεφαλαίων.

Η μελέτη ταχέων αλγορίθμων για την εξίσωση ανισοτροπικής διάχυσης είναι το θέμα του **Κεφαλαίου 4**. Αναλύονται διεξοδικά μερικά αριθμητικά σχήματα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυσή της. Επίσης παρουσιάζονται παραδείγματα συγκριτικής εφαρμογής των διάφορων μεθόδων στο πρόβλημα της ανάλυσης εικόνων σε πολλαπλές κλίμακες με δημιουργία ανισοτροπικών χώρων κλίμακας (scale-spaces).

Το **Κεφάλαιο 5** περιγράφει ένα γρήγορο αλγόριθμο για την εξέλιξη των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων (GACs) και αποτελεί τον πυρήνα της παρούσας εργασίας. Καταρχήν συσχετίζει θεωρητικά το πρόβλημα των GACs με το (απλούστερο) πρόβλημα της ανισοτροπικής διάχυσης, επιτρέποντας έτσι μια διαφορετική ανάγνωση στο μοντέλο των GACs. Τούτο επιτρέπει την επινόηση μεθόδων που εξελίσσουν τις καμπύλες των GACs μέχρι την τελική τους θέση σε *ένα βήμα*. Αυτές οι μέθοδοι "παντρεύονται" άμεσα με τεχνικές ανάλυσης σε πολλαπλές κλίμακες και τεχνικές στενής ζώνης (narrowband), που χρησιμοποιούνται ευρύτατα για επιτάχυνση των κλασικών αλγορίθμων για εξέλιξη των GACs. Στη συνέχεια του κεφαλαίου παρουσιάζουμε μια συσχέτιση μεταξύ των μεθόδων των GACs που αναπτύσσονται στην παρούσα εργασία με μια σειρά σύγχρονων μεθόδων κατάτμησης βασισμένων στη θεωριά των γράφων. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την παρουσίαση πειραματικών αποτελεσμάτων που παρήχθησαν με το συγκεκριμένο αλγόριθμο.

Το **Κεφάλαιο 6** συνοψίζει και σχολιάζει τα αποτελέσματα της εργασίας.

Τέλος, στο **Παράρτημα Α΄** περιγράφουμε συνοπτικά τη συλλογή λογισμικού PETSc© (Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation) που χρησιμοποιήσαμε για την υλοποίηση των αλγορίθμων.

Ευχαριστίες

Η ενασχόλησή μου με την Όραση Υπολογιστών άρχισε την άνοιξη του 2002 στα πλαίσια του ομώνυμου μαθήματος που διδάσκει με ιδιαίτερο ενθουσιασμό ο Καθηγητής Πέτρος Μαραγκός στο Ε.Μ.Π.. Αυτή η σειρά διαλέξεων έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην επιλογή μου να εργαστώ στη συγκεκριμένη ερευνητική περιοχή. Γι΄ αυτή του τη συμβολή, καθώς και για τη σημαντική του βοήθεια και τον πολύ χρόνο που αφιέρωσε για την εκπόνηση αυτής της εργασίας θα ήθελα να τον ευχαριστήσω θερμά.

Θα ήθελα επίσης να αναγνωρίσω τη συμβολή του Λέκτορα Κώστα Τζαφέστα, τόσο στην επιλογή του θέματος της εργασίας (δική του ήταν η ιδέα να ασχοληθώ με hand tracking για την καθοδήγηση ρομπότ), όσο και για μια σειρά διαφωτιστικών συζητήσεων κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής.

Από την περίοδο που εργαζόμουν στο "Δημόκριτο" θα ήθελα ιδιαίτερα να αναφερθώ στις πολύωρες συζητήσεις με το Σέργιο Πετρίδη.

Τέλος, θα ήθελα να αφιερώσω αυτήν την εργασία στην οικογένειά μου, που τόσο καθοριστικά έχει συμβάλει στη διαμόρφωση της σκέψης μου όλα αυτά τα χρόνια.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Πινάκων

Κεφάλαιο 1

Δύο Μοντέλα Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων στην Όραση Υπολογιστών

1.1 Εισαγωγικό τμήμα [1]

Οι *μερικές διαφορικές εξισώσεις (Partial Differential Equations – PDEs)* κατέχουν μια ξεχωριστή θέση στα μαθηματικά. Άρχισαν να ανακύπτουν ήδη από το 18^o αιώνα για να καλύψουν την ανεπάρκεια των συνήθων διαφορικών εξισώσεων να περιγράψουν κάποια φαινόμενα του φυσικού κόσμου. Μεγάλα ονόματα των μαθηματικών πρωτοστάτησαν στην ανάπτυξη του πεδίου: Οι Euler και Lagrange μελέτησαν κύματα σε χορδές, οι Bernoulli και Euler ασχολήθηκαν με τη θεωρία δυναμικού, στην οποία συνεισέφεραν αργότερα οι Legendre και Laplace, ενώ ο Fourier εργάστηκε στην ανάπτυξη συναρτήσεων σε σειρές με βάση τις ιδιοσυναρτήσεις της εξίσωσης θερμότητας. Πολλά από τα πιο σημαντικά επιτεύγματα της σύγχρονης επιστήμης βασίζονται επίσης σε μοντέλα PDEs. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις εξισώσεις του Maxwell στον ηλεκτρομαγνητισμό, την εξίσωση του Schröndiger στην κβαντομηχανική και τις εξισώσεις Navier-Stokes στη ρευστοδυναμική.

Η χρήση PDEs και γενικότερα συνεχών μοντέλων στην επεξεργασία εικόνας και στην όραση υπολογιστών είναι μια σχετικά καινούργια τάση. Οι επιστημονικές αυτές περιοχές, επηρεασμένες από συγγενείς κλάδους, όπως η επεξεργασία φωνής και οι τηλεπικοινωνίες, χρησιμοποιούσαν σχεδόν αποκλειστικά διακριτά εργαλεία της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος. Οι πρώτες πετυχημένες απόπειρες χρήσης συνεχών εργαλείων στην όραση υπολογιστών ήταν οι εξής:

- Η μέθοδος του Horn για εκτίμηση του σχήματος από τη σκίαση shape-

[1] Αυτή η ενότητα έχει βασιστεί σε μεγάλο βαθμό στα [50] και [15]

from-shading (1970, δες π.χ. το [39]).

- Το μοντέλο υπολογισμού οπτικής ροής με μεθόδους λογισμού των μεταβολών από τους Horn και Schunck [40] το 1981.

- Η συσχέτιση της ανάλυσης σε πολλαπλές κλίμακες με την εξίσωση διάχυσης θερμότητας από τον Koenderink το 1984 [46].

Η βασική διαφορά μεταξύ διακριτής και συνεχής μεθοδολογίας έγκειται στον τρόπο μοντελοποίησης των προβλημάτων: Ο διακριτός φορμαλισμός επιβάλλει να μελετούμε τα σήματα αφού πρώτα τα έχουμε ψηφιοποιήσει (ψηφιοποίηση = δειγματοληψία + κβαντισμός). Παραδείγματα διακριτών εργαλείων στην επεγεργασία εικόνας είναι ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier και η συνέλιξη διακριτών σημάτων. Αντίθετα ο συνεχής φορμαλισμός επιτάσσει η μοντελοποίηση των σημάτων να γίνεται σε συνεχείς χώρους. Σε αυτήν την περίπτωση η διακριτοποίηση επέρχεται μόνο κατά την αριθμητική αναπαράσταση και επίλυση των θεωρητικών μοντέλων στον υπολογιστή, όταν αυτό είναι απαραίτητο. Βασικά εργαλεία για τη συνεχή μοντελοποίηση προβλημάτων της όρασης υπολογιστών είναι οι PDEs και ο λογισμός των μεταβολών.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειώσουμε ότι ο διαχωρισμός μεταξύ διακριτών και συνεχών προσεγγίσεων δεν είναι σε καμιά περίπτωση στεγανός. Μέθοδοι που ανήκουν στη μια κατηγορία πολλές φορές σχετίζονται ή/και συμπληρώνουν μεθόδους της άλλης κατηγορίας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η Διαφορική Μορφολογία [49], η οποία μελετάει PDEs που αντιστοιχούν σε μορφολογικά φίλτρα και έχει οδηγήσει σε πιο αποδοτικούς αλγορίθμους για την υλοποίηση ορισμένων μορφολογικών φίλτρων που παλιότερα υλοποιούνταν με μη γραμμικές διακριτές συνελίξεις.

Πλεονεκτήματα του συνεχούς φορμαλισμού είναι, μεταξύ άλλων, τα εξής:

- Απλότητα και ισοτροπικότητα, καθώς τα συνεχή μοντέλα δεν εξαρτώνται από το διακριτό πλέγμα πάνω στο οποίο ορίζεται η εικόνα.

- Εκμετάλλευση της φυσικής διαίσθησης στην προσπάθεια μοντελοποίησης προβλημάτων. Χρησιμοποιώντας αναλογίες με φυσικά φαινόμενα, καθώς και φυσικές έννοιες, όπως η ενέργεια και η δύναμη, μπορούμε να κατασκευάσουμε νέα κομψά μοντέλα για χρήση σε προβλήματα όρασης υπολογιστών.

- Χρήση έτοιμων θεωρητικών αποτελεσμάτων (π.χ. ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης) που είναι αποτέλεσμα της μακρόχρονης ενασχόλησης των επιστημόνων με αντίστοιχα προβλήματα της μαθηματικής φυσικής.

- Η συστηματική διακριτοποίηση των συνεχών μοντέλων με θεμελιωμένες μεθόδους της Αριθμητικής Ανάλυσης οδηγεί σε ακριβείς και ευσταθείς διακριτούς αλγορίθμους για την επίλυση των συνεχών μοντέλων στον υπολογιστή που θα φάνταζαν ad hoc και θα ήταν πολύ δύσκολο να ανακαλυφθούν με την αποκλειστική χρήση διακριτών εργαλείων.

Στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε δύο συνεχή μοντέλα που έχουν αποδειχτεί πετυχημένα στην Όραση Υπολογιστών. Ο αναγνώστης καλείται να δώσει ιδιαίτερη βαρύτητα στις ενότητες 1.2 και 1.3 όπου παρουσιάζονται τα μοντέλα των χώρων κλίμακας και των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων, με την αριθμητική επίλυση των οποίων θα ασχοληθούμε στα Κεφάλαια 4 και 5, αντίστοιχα.

1.2 Χώροι κλίμακας και εξίσωση διάχυσης

1.2.1 Ανάλυση σε πολλαπλές κλίμακες

Οι εικόνες που απεικονίζουν αντικείμενα του φυσικού κόσμου συνήθως περιέχουν πληροφορίες σε πολλαπλές κλίμακες. Ένα τέτοιο παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 1.1. Όταν θέλουμε να εξάγουμε κάποια χαρακτηριστικά από μια εικόνα (π.χ. ακμές, ομογενή τμήματα κοκ) πρέπει να καθορίζουμε την κλίμακα που μας ενδιαφέρει. Ενώ ο καθορισμός κλίμακας γίνεται τις περισσότερες φορές υποσυνείδητα από τους ανθρώπους, ανάλογα με το μέγεθος των αντικειμένων που τους ενδιαφέρουν κατά περίπτωση, η ενδιαφέρουσα κλίμακα πρέπει να δηλώνεται ρητά σε ένα σύστημα μηχανικής όρασης προκειμένου να παράγει ικανοποιητικά αποτελέσματα.

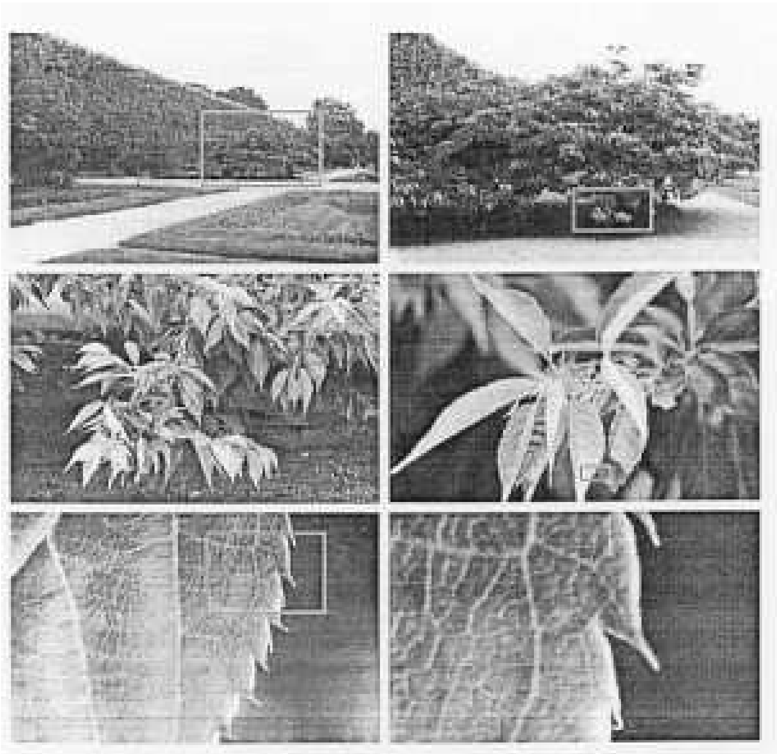
Προβλήματα της όρασης υπολογιστών στα οποία η ανάλυση σε πολλαπλές κλίμακες είναι χρήσιμη είναι, μεταξύ άλλων:

- Καθαρισμός της εικόνας από το θόρυβο.

- Ανίχνευση χαρακτηριστικών της εικόνας (π.χ. ακμές και ομογενή τμήματα) σε μεγάλη κλίμακα, όπου ο εντοπισμός τους είναι πιο εύκολος, και κατόπιν ακριβής καθορισμός της θέσης τους σε μικρή κλίμακα, όπου περισσότερες λεπτομέρειες είναι διαθέσιμες.

- Πιο εύρωστη εκτίμηση της κίνησης αντικειμένων με ταίριασμα χαρακτηριστικών σε πολλαπλές κλίμακες.

- Κατάτμηση εικόνας σε αντικείμενα της κλίμακας που μας ενδιαφέρει κάθε φορά.



Σχήμα 1.1: "Ένας κόσμος σε πολλαπλές κλίμακες …Οι φωτογραφίες έχουν ληφθεί σε ένα πάρκο προχωρώντας μπροστά και λαμβάνοντας κάθε νέο πλάνο από πολύ μικρότερη απόσταση σε σχέση με το προηγούμενο. Το ορθογώνιο σε κάθε εικόνα απεικονίζει το τμήμα του αντικειμένου στο οποίο επικεντρωνόμαστε στο επόμενο πλάνο. Καθώς η απόσταση από τα αντικείμενα μικραίνει, η όψη τους αλλάζει και νέες δομές εμφανίζονται…" Από το [36].

Επίσης η ανάλυση σε πολλαπλές κλίμακες μπορεί πολλές φορές να επιταχύνει την εκτέλεση πολλών αλγορίθμων επεξεργασίας εικόνας, όπως θα δούμε και στην ενότητα 5.4 για την περίπτωση των αλγορίθμων που περιγράφει η παρούσα εργασία.

1.2.2 Χώροι κλίμακας από γραμμική και μη-γραμμική διάχυση

Η σημασία της ανάλυσης σε πολλαπλές κλίμακες είχε αναγνωριστεί ήδη από τα πρώτα βήματα της όρασης υπολογιστών [71]. Η θεωρία των *χώρων κλίμακας (scale-spaces)*, που προτάθηκε από τον Witkin το 1983 [77], έθεσε τα θεμέλια για μια μαθηματική αντιμετώπιση αυτών των θεμάτων.

Η βασική ιδέα του Witkin είναι σχετικά απλή: Δημιουργούμε μια συνεχή οικογένεια γκρίζων εικόνων $I(x,y,s)$ συνελίσσοντας την αρχική εικόνα $I_0(x,y)$ με έναν Gaussian πυρήνα $G_s(x,y)$ διακύμανσης s:

$$I(x,y,s) = I_0(x,y) * G_s(x,y) \qquad \text{με } s \geq 0, \tag{1.1}$$

όπου $G_s(x,y) = \frac{1}{2\pi s}\exp(-\frac{x^2+y^2}{2s})$. Μεγαλύτερη τιμή της παραμέτρου s αντιστοιχεί σε εικόνες τραχύτερης κλίμακας. Η τιμή $s = 0$ αντιστοιχεί στην αρχική εικόνα. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει μια σειρά από εικόνες που είναι θολωμένες (blurred) εκδοχές της αρχικής εικόνας, με το θόλωμα να αυξάνει καθώς η παράμετρος s μεγαλώνει.

Ο Koenderink πρώτος παρατήρησε [46] ότι οι εικόνες που προκύπτουν με Gaussian φιλτράρισμα μπορούν ισοδύναμα να προκύψουν λύνοντας την εξίσωση ομοιόμορφης διάχυσης θερμότητας

$$\frac{\partial I}{\partial t}(x,y,t) = \nabla^2 I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \tag{1.2}$$

με αρχική συνθήκη $I(x,y,0) = I_0(x,y)$. Για να έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα με τη μέθοδο της συνέλιξης με πυρήνα Gauss διακύμανσης s, αρκεί να λύσουμε την PDE (1.2) μέχρι χρόνο $t = s/2$.

Το μεγάλο μειονέκτημα των Gaussian χώρων κλίμακας είναι ότι, πέρα από το να μειώνουν το θόρυβο και να εξαλείφουν χαρακτηριστικά μικρής κλίμακας, θολώνουν και μετακινούν χωρικά κάποια σημαντικά χαρακτηριστικά της εικόνας (π.χ. ακμές) στην κλίμακα που μας ενδιαφέρει (δες το σχήμα 1.2). Τούτο οφείλεται στην ισοτροπικότητα και γραμμικότητα του μοντέλου, που δεν επιτρέπει στη διαδικασία να προσαρμόζεται στα τοπικά χαρακτηριστικά της εικόνας με τον επιθυμητό τρόπο.

Για να αντιμετωπίσουν τα μειονεκτήματα του Gaussian χώρου κλίμακας οι Perona και Malik πρότειναν το 1990 [59] τη χρήση της εξίσωσης *ανισοτροπικής* *διάχυσης θερμότητας* για τη δημιουργία των χώρων κλίμακας, που γενικεύει την εξίσωση (1.2):

$$\frac{\partial I}{\partial t}(x,y,t) = \mathrm{div}(g\nabla I) \tag{1.3}$$

με αρχική συνθήκη $I(x,y,0) = I_0(x,y)$. Η ισοτροπική εξίσωση (1.2) προκύπτει ως ειδική περίπτωση για $g \equiv 1$. Η συνάρτηση $g = g(x,y,I,\|\nabla I\|)$ εξαρτάται από την εικόνα, παίρνει τιμές στο $(0,1]$ και είναι το ανάλογο του συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας. Σκοπός αυτής της συνάρτησης είναι να ευνοήσει το θόλωμα εντός ομογενών περιοχών (intraregion smoothing), επιβάλλοντας υψηλό συντελεστή αγωγιμότητας στα ομογενή τμήματα, και να αποτρέψει την ανάμειξη μεταξύ δυο γειτονικών ετερογενών περιοχών (interregion smoothing), επιβάλλοντας χαμηλό συντελεστή αγωγιμότητας μεταξύ δυο ετερογενών τμημάτων και εμποδίζοντας έτσι τη μεταξύ τους αλληλεπίδραση. Μια τέτοια μη-γραμμική επιλογή για το g είναι:

$$g = g(\|\nabla I_{s_0}\|) = \exp\big(-\frac{\|\nabla I_{s_0}\|^2}{\sigma}\big) \tag{1.4}$$

όπου το σ είναι μια σταθερά αντίθεσης, εξαρτώμενη από το πρόβλημα. Χρησιμοποιούμε το $I_{s_0} \equiv I * G_{s_0}$ αντί του I για τον υπολογισμό του gradient επειδή αυτό οδηγεί σε λύση που εξαρτάται ομαλά από τις αρχικές συνθήκες, όπως απέδειξαν οι Catte κ.ά. [16] και οι Alvarez κ.ά. [4], καθιστώντας το πρόβλημα *καλά ορισμένο* (ο ορισμός του καλά ορισμένου προβλήματος θα δοθεί στο Κεφάλαιο 2).

Στο σχήμα 1.2 βλέπουμε συγκριτικά το Gaussian χώρο κλίμακας και τον αντίστοιχο ανισοτροπικό. Ο χρόνος εξέλιξης t_{is} της ισοτροπικής PDE για κλίμακα s προκύπτει από τη σχέση $t_{is} = s/2$. Για την ανισοτροπική περίπτωση ακολουθήσαμε τον ευριστικό κανόνα $t_{anis} = 10t_{is} = 5s$, δηλαδή πήραμε δεκαπλάσιο χρονικό βήμα σε κάθε κλίμακα σε σχέση με την αντίστοιχη ισοτροπική περίπτωση για να οδηγηθούμε σε αποτελέσματα που οπτικά αντιστοιχούν στην ίδια κλίμακα. Τούτο οφείλεται στο γεγονός ότι $g_{anis} = \exp\big(-\frac{\|\nabla I_{s_0}\|^2}{\sigma}\big) \ll 1 = g_{is}$. Παρατηρούμε ότι ο ανισοτροπικός χώρος διάχυσης έχει την πολύ επιθυμητή ιδιότητα να διατηρεί σχεδόν ακέραια τα αντικείμενα της κλίμακας που μας ενδιαφέρει, ενώ ο Gaussian χώρος κλίμακας θολώνει όλα ανεξαιρέτως τα αντικείμενα δημιουργώντας ασάφειες.

1.2.3 Ιδιότητες της εξίσωσης διάχυσης και αρχή μεγίστου-ελαχίστου

Οι δυο αρχές που ικανοποιεί ο Gaussian χώρος κλίμακας, όπως τις εξέφρασε ο Koenderink, είναι οι εξής [46]:

Σχήμα 1.2: Χώροι κλίμακας από διάχυση για την εικόνα "Cameraman." (256×256 pixels, 256 στάθμες γκρίζου), που παράχθηκαν σε δύο επαναλήψεις με τους αλγορίθμους του κεφαλαίου 4. Κλίμακες (από αριστερά προς τα δεξιά) 4, 8, 16, 32, 64. *Πάνω:* Gaussian χώρος κλίμακας. *Κάτω:* ανισοτροπικός χώρος κλίμακας (παράμετρος σ της εξίσωσης (1.4) ίση με 0.01).

1. *Αιτιότητα (causality):* Κάθε χαρακτηριστικό της εικόνας σε πιο τραχειά κλίμακα (αιτιατό) θα πρέπει να προέρχεται από ένα τουλάχιστον χαρακτηριστικό της εικόνας σε πιο λεπτομερή κλίμακα (αίτιο), χωρίς απαραίτητα να ισχύει το αντίστροφο. Με άλλα λόγια το περιεχόμενο πληροφορίας της εικόνας θα πρέπει να ελαττώνεται καθώς προχωράμε σε πιο τραχειές κλίμακες.

2. *Ισοτροπικότητα (homogeneity, isotropy):* Το φιλτράρισμα (θόλωμα) της εικόνας θα πρέπει να γίνεται ισοτροπικά. Καμιά κατεύθυνση στο χώρο δεν είναι προτιμότερη από τις άλλες.

Αυτά τα δύο κριτήρια οδηγούν με φυσικό τρόπο στην εξίσωση ισοτροπικής διάχυσης θερμότητας (1.2) που είναι ίσως η απλούστερη εξίσωση που τα ικανοποιεί και τα δύο.

Εξετάζοντας με πιο μεγάλη προσοχή τα κριτήρια του Koenderink μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι το κριτήριο της ισοτροπικότητας δεν προκύπτει από κάποια θεμελιώδη αρχή που πρέπει να ικανοποιεί ο χώρος κλίμακας, παρά προστέθηκε γιατί αντιστοιχεί σε απλή και αποδοτική υλοποίηση. Αυτή ακριβώς η απαίτηση για ισοτροπικότητα είναι που προκαλεί τα προβλήματα που προαναφέρθηκαν στο Gaussian χώρο κλίμακας.

Για αυτό το λόγο οι Perona και Malik, ενώ διατηρούν την απαίτηση για αιτιότητα, αντικαθιστούν την απαίτηση για ισοτροπικότητα με άλλες δύο επιθυμητές ιδιότητες του χώρου διάχυσης προκειμένου να οδηγηθούν στο μη-γραμμικό μοντέλο που προτείνουν με την εξίσωση (1.3). Αυτές οι δύο ιδιότητες είναι [59]:

1. *Εντοπισμός (localization):* Οι ακμές των αντικειμένων που σημασιολογικά ανήκουν σε κάποια κλίμακα παραμένουν έντονες και δε μετακινούνται σε σχέση με την αρχική εικόνα ωσότου φτάσουμε στην κλίμακα αυτή.

2. *Ομαλοποίηση ομογενών περιοχών (piecewise smoothing):* Σε όλες τις κλίμακες η ομαλοποίηση εντός μιας ομογενούς περιοχής ευνοείται σε σχέση με την ομαλοποίηση μεταξύ δυο γειτονικών περιοχών, ετερογενών μεταξύ τους.

Θα σχολιάσουμε τώρα το πρώτο κριτήριο του Koenderink που αντιστοιχεί στη μη-αντιστρεπτότητα της διαδικασίας ανάλυσης σε πολλαπλές κλίμακες και είναι ουσιώδες. Στη φυσική τέτοιες διαδικασίες διέπονται από το δεύτερο θερμοδυναμικό νόμο για μη-αντιστρεπτές μεταβολές και περιγράφονται από μερικές διαφορικές εξισώσεις παραβολικού τύπου, βασικός εκπρόσωπος των οποίων είναι η εξίσωση διάχυσης θερμότητας, τόσο η ισοτροπική (1.2), όσο και η ανισοτροπική (1.3).

Όπως πρώτος παρατήρησε ο Hummel το 1986 [41], η ιδιότητα αιτιότητας που ικανοποιούν οι χώροι διάχυσης συνδέεται στενά με μια πολύ σημαντική ιδιότητα των λύσεων της (ανισοτροπικής) εξίσωσης διάχυσης θερμότητας, την *Αρχή Μεγίστου-Ελαχίστου (min-max principle)*, που περιγράφεται στο παρακάτω θεώρημα, την απόδειξη του οποίου ο αναγνώστης μπορεί να βρει σε οποιοδήποτε βιβλίο για PDEs (δες π.χ. το [42]):

Θεώρημα 1.1 (Αρχή Μεγίστου-Ελαχίστου). *Έστω A ένα ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, στην περίπτωσή μας το επίπεδο της εικόνας $(0, L_x) \times (0, L_y)$. Αν η συνάρτηση $I : \overline{A} \times [0, T] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\overline{A} \times [0, T]$ και ικανοποιεί την εξίσωση θερμότητας (1.3) στο $A \times (0, T)$, τότε παίρνει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της στο σύνολο $B = \{\overline{A} \times \{0\}\} \cup \{\partial A \times [0, T]\}$, δηλαδή τα ακρότατα είτε βρίσκονται στην αρχική εικόνα είτε στα όρια της εικόνας σε κάποια κλίμακα $t > 0$.*
Αν επιπλέον έχουμε αδιαβατική οριακή συνθήκη στα όρια της εικόνας ($\nabla I = 0$ στο $\partial A \times [0, T]$), τότε τα ακρότατα θα βρίσκονται στην αρχική εικόνα.

1.2.4 Κάποιες τελευταίες παρατηρήσεις

Κάτι που αξίζει να σημειωθεί είναι ότι ο Gaussian χώρος κλίμακας μπορεί να παραχθεί πολύ εύκολα με διαδοχικές συνελίξεις με Gaussian παράθυρα, αφού αντιστοιχεί σε γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο φίλτρο. Αντίθετα η δημιουργία του ανισοτροπικού χώρου κλίμακας απαιτεί την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης (1.3), μια σχετικά πολύπλοκη και αργή διαδικασία. Για αυτό το λόγο οι περισσότερες εφαρμογές πραγματικού χρόνου χρησιμοποιούν το Gaussian χώρο κλίμακας (δες π.χ. το [48]). Σημαντική έρευνα όμως γίνεται για την ανακάλυψη αλγορίθμων που θα επιταχύνουν την κατασκευή του ανισοτροπικού χώρου κλίμακας. Το Κεφάλαιο 4 είναι αφιερωμένο σε αυτό το θέμα.

Για λόγους πληρότητας πρέπει τέλος να αναφέρουμε ότι υπάρχουν και άλλες τάσεις στην προσπάθεια για ανάλυση σε πολλαπλές κλίμακες. Μια διαφορετική PDE προτείνεται στο [4], που επιτρέπει τη διάχυση μόνο κάθετα στο ∇I. Στο χώρο της μορφολογίας έχουμε χρήση σχετικά σύνθετων μορφολογικών φίλτρων στη δημιουργία μορφολογικών πυραμίδων (βλέπε [50], [52] και [70]). Ο μετασχηματισμός wavelet χρησιμοποιείται επίσης για τον ίδιο σκοπό. Μια θεωρία που προσπαθεί να περιγράψει τις βασικές ιδιότητες της πυραμιδικής ανάλυσης αναπτύσσεται στα [32] και [38]. Η μελέτη αυτών των θεμάτων ξεφεύγει από τους σκοπούς της παρούσας εργασίας και παραλείπεται.

1.3 Γεωδαιτικά ενεργά περιγράμματα και επιπεδοσύνολα

1.3.1 Ενεργές καμπύλες

Ένα από τα πιο σύγχρονα εργαλεία στην όραση υπολογιστών είναι οι *ενεργές καμπύλες (active contours)* ή *"φίδια" (snakes)*, που εισήχθησαν από τους Kass, Witkin και Terzopoulos το 1987 [44] για την εύρεση των ορίων ενός αντικειμένου της εικόνας. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο αρχικοποιούμε μια καμπύλη στο επίπεδο της εικόνας και ύστερα την παραμορφώνουμε με τέτοιο τρόπο, ώστε να προσεγγίσει το σύνορο του αντικειμένου που μας ενδιαφέρει. Αυτό επιτυγχάνεται με την ελαχιστοποίηση ενός ενεργειακού συναρτησιακού της καμπύλης, σχεδιασμένου κατάλληλα προκειμένου η καμπύλη που αντιστοιχεί σε (τοπικό) ελάχιστο να συμπίπτει με τα όρια του αντικειμένου που μας ενδιαφέρει. Το ενεργειακό συναρτησιακό περιέχει βασικά δύο όρους, έναν που έλκει την καμπύλη κοντά στις ακμές της εικόνας και έναν που προέρχεται από την Αρχή Ελάχιστου Μήκους Περιγραφής (MDL principle) [45] και ευνοεί την ομαλότητα της καμπύλης. Η μέθοδος των φιδιών είναι ένα παράδειγμα της ευρύτερης τεχνικής σύμφωνα με την οποία ταιριάζουμε ένα παραμορφώσιμο μοντέλο (deformable template) στα δεδομένα της εικόνας μέσω ελαχιστοποίησης κατάλληλα ορισμένης ενέργειας [9].

Πιο συγκεκριμένα, το κλασικό μοντέλο των ενεργών καμπυλών έχει ως εξής: Έστω $C(q) \equiv (x(q), y(q)) : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ μια καμπύλη του επιπέδου με παράμετρο q και $I : [0,a] \times [0,b] \to \mathbb{R}^+$ η εικόνα στην οποία προσπαθούμε να βρούμε τα όρια των αντικειμένων. Το συναρτησιακό της καμπύλης που προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε δίνεται από την ακόλουθη σχέση (δες [44]):

$$E(C(p)) = \underbrace{\alpha \int_0^1 \|C'(q)\|^2 dq + \beta \int_0^1 \|C''(q)\|^2 dq}_{\text{εσωτερική ενέργεια}} - \underbrace{\lambda \int_0^1 \|\nabla I(C(q))\| dq}_{\text{εξωτερική ενέργεια}} \quad (1.5)$$

με τα α, β και λ θετικές παραμέτρους. Οι δυο πρώτοι όροι ευνοούν την ομαλότητα της καμπύλης (εσωτερική ενέργεια), ενώ ο τρίτος όρος την οδηγεί κοντά στις ακμές του αντικειμένου (εσωτερική ενέργεια).

Αυτό το μοντέλο έχει χρησιμοποιηθεί με επιτυχία σε πολλές εφαρμογές και είναι αρκετά γρήγορο [8]. Παρόλα αυτά έχει κάποιες εγγενείς αδυναμίες. Πιο συγκεκριμένα, το μοντέλο αυτό εξαρτάται από την παραμετροποίηση της καμπύλης (δεν είναι δηλαδή γεωμετρικό). Επίσης δεν μπορεί να χειριστεί με φυσικό τρόπο αλλαγές στην τοπολογία της καμπύλης καθώς αυτή εξελίσσεται. Αυτό είναι ένα σοβαρό πρόβλημα όταν ο αριθμός των αντικειμένων που θέλουμε να ανιχνευθούν είναι άγνωστος a priori. Έχουν βέβαια προταθεί κάποιες μέθοδοι για να ανιχνεύεται πιθανή αλλαγή στην τοπολογία (δες π.χ. [53]), αλλά είναι ευριστικές και πολύπλοκες.

1.3.2 Γεωδαιτικά ενεργά περιγράμματα

Το μοντέλο των *γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων (geodesic active contours* εισήχθηκε από τους Caselles, Kimmel και Sapiro το 1995 [14] στην προσπάθεια να αντιμετωπιστούν οι αδυναμίες των ενεργών καμπυλών.

Το μοντέλο αυτό βασίζεται στο συναρτησιακό ενέργειας

$$E(C(p)) = \alpha \int_0^1 \|C'(q)\|^2 dq + \lambda \int_0^1 g^2(\|\nabla I(C(q))\|) dq \quad (1.6)$$

με τη $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ να είναι μια φθίνουσα συνάρτηση τέτοια, ώστε $g(r) \to 0$ καθώς το $r \to +\infty$, όπως για παράδειγμα η (1.4). Εμείς στα πειράματά μας θα χρησιμοποιήσουμε για το σκοπό αυτό τη συνάρτηση:

$$g = g(\|\nabla I\|) = \exp\big(-\frac{\|\nabla I_{s_0}\|}{\sigma}\big) \quad (1.7)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (1.5) και (1.6) παρατηρούμε ότι το μοντέλο των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων στερείται του δεύτερου όρου ομαλότητας του μοντέλου των ενεργών καμπυλών. Αυτό όμως δεν είναι ιδιαίτερα περιοριστικό, καθώς ο πρώτος όρος αρκεί για να κάνει την καμπύλη ομαλή. Ταυτόχρονα το $-\|\nabla I(C(q))\|$ στον τρίτο όρο της εξίσωσης (1.5) αντικαθίσταται από το $g(\|\nabla I(C(q))\|)$.

Κάνοντας αυτές τις αλλαγές, οδηγούμαστε σε ένα γεωμετρικό μοντέλο που δεν εξαρτάται από την παραμετροποίηση, καθότι, όπως αποδεικνύεται στο [14], η ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού (1.6) ισοδυναμεί με το μη παραμετρικό γεωδαιτικό πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού

$$L_R = E(C) = \int_0^{L(C)} g(\|\nabla I(C(s))\|)ds = \int_0^1 \underbrace{g(\|\nabla I(C(q))\|)}_{\text{έλξη από ακμές}} \underbrace{\|C'(q)\|}_{\text{ομαλότητα}} dq \tag{1.8}$$

όπου $C(s)$ είναι η φυσική παραμετροποίηση της καμπύλης με την παράμετρο μήκους τόξου s, $L(C)$ είναι το ευκλείδειο μήκος της καμπύλης C και L_R είναι το γεωδαιτικό μήκος της καμπύλης (η μετρική $g(\|\nabla I\|)$ εξαρτάται από την εικόνα και την επιλογή της μορφής της συνάρτησης g). Σημειωτέον ότι για $g \equiv 1$ το γεωδαιτικό μήκος εκφυλίζεται στο ευκλείδειο μήκος και το κριτήριο είναι η ελαχιστοποίηση του μήκους της καμπύλης.

Πέρα από το να αποφεύγει την εξάρτηση από την παραμετροποίηση, το μοντέλο των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων μπορεί , όπως βλέπουμε στη συνέχεια, να υπερβεί και τα τοπολογικά προβλήματα του μοντέλου των ενεργών καμπυλών που συζητήσαμε, αρκεί να υλοποιηθεί με χρήση της μεθόδου των επιπεδοσυνόλων, που περιγράφουμε στην υποενότητα 1.3.3.

Πιο συγκεκριμένα, η εξίσωση Euler-Lagrange για την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού (1.8) με τη μέθοδο gradient descent είναι η εξής [14]:

$$\frac{\partial C(t)}{\partial t} = g\kappa\vec{N} - (\nabla g \cdot \vec{N})\vec{N} \tag{1.9}$$

όπου κ είναι η καμπυλότητα της C και $\vec{N}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα με κατεύθυνση προς τα μέσα. Στην τελική κατάσταση (για $t \to +\infty$) έχουμε μηδενισμό του αριστερού μέρους της εξίσωσης ($\frac{\partial C(t)}{\partial t}$), άρα και του δεξιού. Ο μηδενισμός του δεξιού μέρους της εξίσωσης σημαίνει ότι η μεταβολική παράγωγος $\frac{\partial E(C)}{\partial C}$ της ενέργειας (1.8) ως προς την καμπύλη C μηδενίζεται, που είναι αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη (τοπικού) ελαχίστου. Η εξίσωση (1.9) μας δείχνει πώς κινείται κάθε σημείο της καμπύλης C μέχρι να φτάσει στην κατάσταση ισορροπίας. Παρατηρούμε ότι για $g \equiv 1$ η κίνηση εκφυλίζεται σε συστολή της καμπύλης με ταχύτητα ανάλογη της καμπυλότητας και έτσι η καμπύλη συρρικνώνεται τελικά σε σημείο, σύμφωνα με το θεώρημα του Grayson [33].

Η επίλυση των τοπολογικών προβλημάτων επιτυγχάνεται με την κίνηση της καμπύλης στο επίπεδο με τη μέθοδο των επιπεδοσυνόλων, που παρουσιάζεται στην υποενότητα 1.3.3. Πιο συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε ότι η καμπύλη δίνεται έμμεσα ως η ισοδυναμική καμπύλη σταθερού δυναμικού μιας συνάρτησης

$u(x,y,t)$ που ορίζεται σε όλο το επίπεδο της εικόνας, τότε μπορούμε να πετύχουμε την κίνηση της καμπύλης σύμφωνα με το μοντέλο των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων εξελίσσοντας, αντί της εξίσωσης (1.9), την εξίσωση

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} &= \|\nabla u\|\mathrm{div}\Big(g\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}\Big) \\ &= g\|\nabla u\|\kappa + \nabla g \cdot \nabla u\end{aligned} \tag{1.10}$$

Το πώς προκύπτει αυτή η εξίσωση θα γίνει κατανοητό στην υποενότητα 1.3.3. Η εξίσωση (1.10) επιλύεται με αριθμητικές μεθόδους, η μελέτη των οποίων είναι το βασικό θέμα αυτής της εργασίας και θα καλυφθεί εκτενώς στα Κεφάλαια 2 και 5. Η αλλαγή τοπολογίας της καμπύλης που ορίζεται από το επιπεδοσύνολο της $u(x,y,t)$ γίνεται αυτόματα, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.3, όπου καταφέρνουμε να περικυκλώσουμε δύο αντικείμενα παρόλο που ξεκινάμε με μία καμπύλη.

Προκειμένου να επιταχυνθεί η κίνηση της καμπύλης και να μειωθεί η πιθανότητα παγίδευσής της από τοπικά ελάχιστα, έχει προταθεί η προσθήκη ενός όρου (balloon force) σταθερής ταχύτητας συστολής (διαστολής) που αντιστοιχεί στο μορφολογικό erosion (dilation) και ευνοεί την ελαχιστοποίηση (μεγιστοποίηση) της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη. Αυτός ο όρος έχει τη μορφή $cg(\|\nabla I\|)\vec{N}$ για την εξίσωση (1.9) και τη μορφή $cg(\|\nabla I\|)\|\nabla u\|$ για την εκδοχή του level set φορμαλισμού (1.10). Έτσι το μοντέλο των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων με αυτόν τον όρο γράφεται:

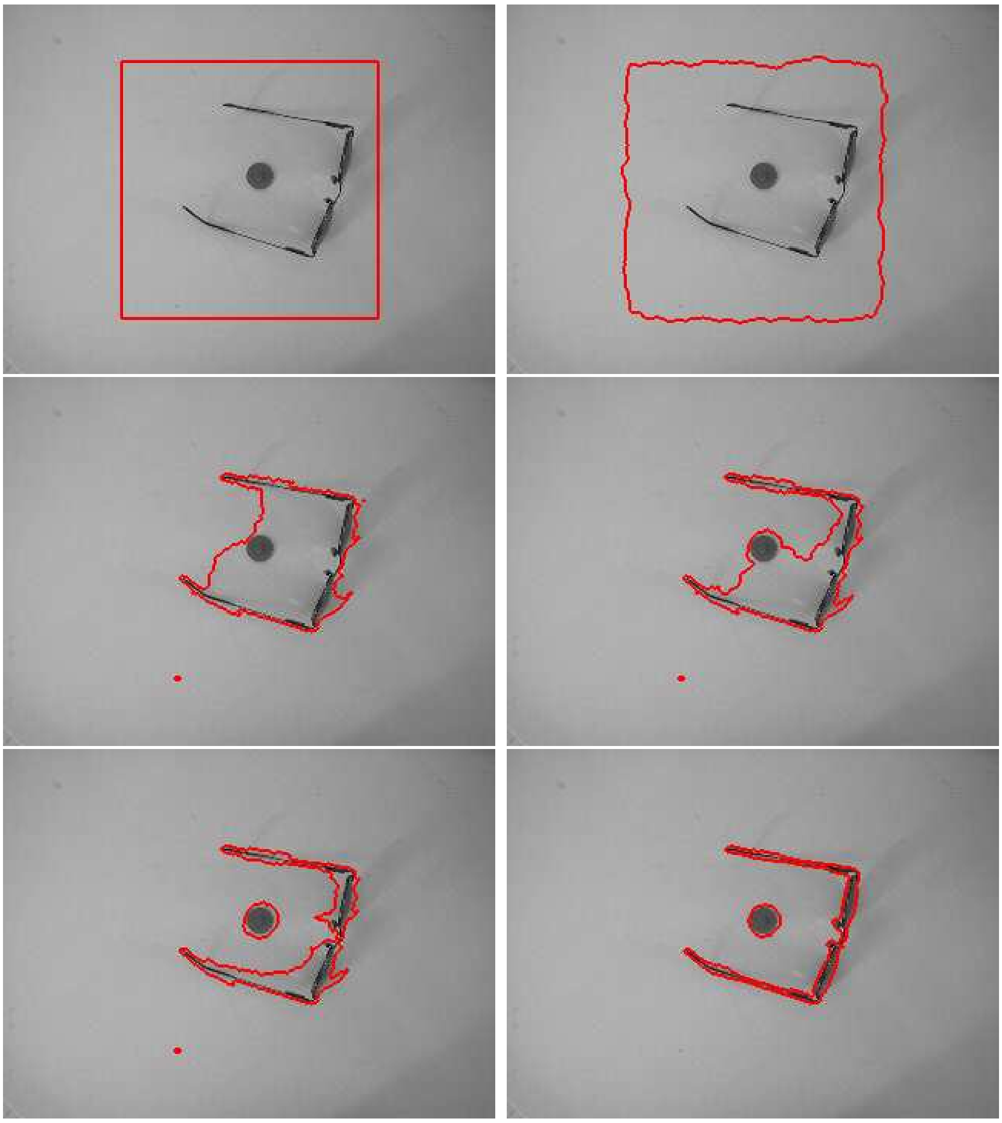
$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = (\kappa + c)g\|\nabla u\| + \nabla g \cdot \nabla u \tag{1.11}$$

Αξίζει τέλος να αναφέρουμε ότι το μοντέλο των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων μπορεί, πέρα από το πρόβλημα της εύρεσης των ακμών ενός αντικειμένου, να χειριστεί και μια σειρά άλλων προβλημάτων της όρασης υπολογιστών απλά επιλέγοντας μια συνάρτηση g που να μην εξαρτάται από το $\|\nabla I\|$ αλλά από κάποιο άλλο χαρακτηριστικό της εικόνας. Για μια ενδιαφέρουσα τέτοια εφαρμογή του μοντέλου στο πρόβλημα του tracking δες το [57]. Αυτή ακριβώς η ευελιξία καθιστά τα γεωδαιτικά ενεργά περιγράμματα ιδιαίτερα δημοφιλή.

1.3.3 Εξέλιξη καμπυλών στο επίπεδο και επιπεδοσύνολα

Στην περιγραφή του μοντέλου των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων αναφερθήκαμε στη μέθοδο των *επιπεδοσυνόλων (level sets)*, που προτάθηκε το 1988 από τους Osher και Sethian [55]. Η μέθοδος των επιπεδοσυνόλων προτείνει έναν Eulerian φορμαλισμό [2] για την εξέλιξη καμπυλών στο επίπεδο (γενικότερα μετώπων διάστασης $n-1$ σε ένα χώρο n διαστάσεων) και προσφέρεται

[2]Η ορολογία προέρχεται από τη Μηχανική, όπου η Eulerian περιγραφή της κίνησης των αντικειμένων γίνεται σε σχέση με ένα σταθερό στο χώρο σύστημα αναφοράς, ενώ η La-



Σχήμα 1.3: Εξέλιξη γεωδαιτικού ενεργού περιγράμματος για την εικόνα "Νόμισμα και Γυαλιά" (320×240 pixels, 256 στάθμες γκρίζου). Τα αποτελέσματα παράχθηκαν σε μία επανάληψη με διαφορετικό χρονικό βήμα τ το καθένα με τους αλγορίθμους του κεφαλαίου 5. Χρησιμοποιήθηκε η $g = \exp\left(-\frac{\|\nabla I_{s_0}\|}{\sigma}\right)$, με παράμετρο αντίθεσης $\sigma = 0.001$ και παράμετρο κανονικοποίησης $s_0 = 1.0$.

ιδιαίτερα για την αριθμητική επίλυση τέτοιων μοντέλων, χειριζόμενη με φυσικό τρόπο αλλαγές στην τοπολογία της καμπύλης (γενικότερα του μετώπου).

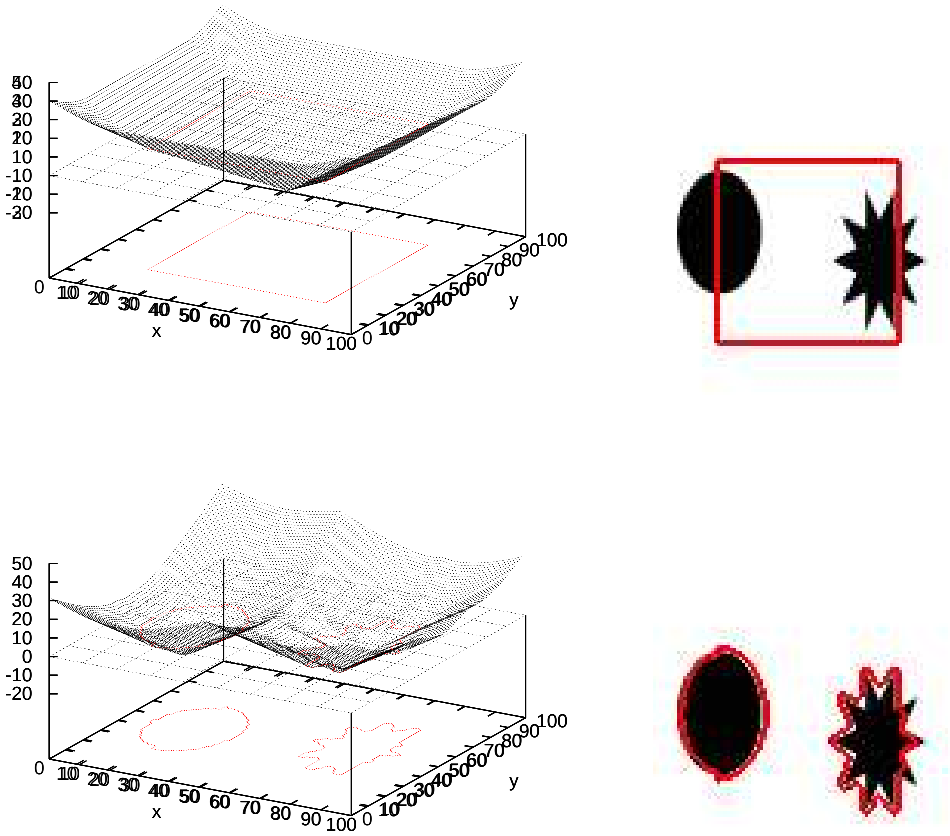
Πιο συγκεκριμένα, έστω $\Gamma(t) = \{C(q,t) : q \in [0,1]\}$, όπου $C(q,t) \equiv (x(q,t), y(q,t)) : [0,1] \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}^2$, μια οικογένεια κλειστών καμπυλών στο επίπεδο που παράγεται από μια αρχική καμπύλη $\Gamma(0) = \{C_0(q) : q \in [0,1]\}$ με το νόμο

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t}(q,t) = F\vec{N} \\ C(q,0) = C_0(q) \end{cases} \tag{1.12}$$

όπου $\vec{N}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα με κατεύθυνση προς το εσωτερικό του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη και F η ταχύτητα κίνησης κάθε σημείου της καμπύλης. Αυτός είναι ο Lagrangian φορμαλισμός της κίνησης της καμπύλης και θα μπορούσε να υλοποιηθεί αριθμητικά παίρνοντας στην αρχική καμπύλη $\Gamma(0)$ τα σημεία $\{\vec{x}_i = C_0(\frac{i}{N}), i = 0, \ldots, N-1\}$, που προκύπτουν δειγματοληπτώντας ομοιόμορφα στο $[0,1)$ την παράμετρο q, και στη συνέχεια εξελίσσοντας καθένα από τα $\vec{x}_i$ ανεξάρτητα. Αυτή η μέθοδος όμως παρουσιάζει πολλές δυσκολίες: Ο υπολογισμός χαρακτηριστικών μεγεθών της καμπύλης (π.χ. $\kappa, \vec{N}$) είναι δύσκολος, τα σημεία τείνουν να συσσωρεύονται σε ένα τμήμα της καμπύλης με αποτέλεσμα να απαιτείται συχνά επαναπαραμετροποίηση και, το κυριότερο, οι αλλαγές στην τοπολογία της καμπύλης είναι δύσκολο να πραγματοποιηθούν.

Για αυτούς τους λόγους οι Osher και Sethian [55] πρότειναν να αντιμετωπιστεί η κίνηση της καμπύλης σε ένα Eulerian πλαίσιο. Σύμφωνα με τη μέθοδο των επιπεδοσυνόλων η καμπύλη, αντί να οριστεί με τη βοήθεια της διανυσματικής συνάρτησης $C(q,t)$, καθορίζεται με τη βοήθεια της βαθμωτής συνάρτησης $u(x,y,t) : \mathbb{R}^2 \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, η οποία ορίζεται σε ολόκληρο το επίπεδο της εικόνας και όχι μόνο πάνω στην καμπύλη. Με το νέο φορμαλισμό η καμπύλη ορίζεται έμμεσα, ως η ισοδυναμική καμπύλη τιμής 0 της u, δηλαδή $\Gamma(t) = \{(x,y) : u(x,y,t) = 0\}$. Η επέκταση της συνάρτησης u στο υπόλοιπο χωρίο μπορεί να γίνει αυθαίρετα, υπό τον περιορισμό η u να είναι Lipschitz συνεχής. Στην εργασία αυτή ακολουθούμε τη σύμβαση ότι $u(x,y,t) > 0$ για τα σημεία (x,y) που είναι εκτός της περιοχής που περικλείεται από την καμπύλη και $u(x,y,t) < 0$ για τα εσωτερικά σημεία. Μια τέτοια συνάρτηση είναι π.χ. ο προσημασμένος μετασχηματισμός απόστασης από την καμπύλη. Οι ιδέες αυτές απεικονίζονται στο σχήμα 1.4. Στο ίδιο σχήμα παρατηρούμε ότι η μέθοδος των επιπεδοσυνόλων χειρίζεται με φυσικό τρόπο αλλαγές στην τοπολογία της καμπύλης, όπως είδαμε και στην υποενότητα 1.3.2, όπου η μέθοδος χρησιμοποιήθηκε για την εξέλιξη γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων.

grangian περιγραφή γίνεται με βάση ένα σύστημα αναφοράς προσαρτημένο στο κινούμενο σώμα.



Σχήμα 1.4: Εξέλιξη καμπύλης με επιπεδοσύνολα. Το παράδειγμα προέρχεται από την εφαρμογή της μεθόδου των επιπεδοσυνόλων για την εξέλιξη γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων. *Πρώτη στήλη:* Η συνάρτηση $u(x, y, t)$ στην οποία ενσωματώνεται η καμπύλη και το επίπεδο $z = 0$. Η καμπύλη ορίζεται ως η τομή επιφάνειας και επιπέδου. *Δεύτερη στήλη:* Η καμπύλη $\Gamma(t)$ στο επίπεδο της εικόνας. Παρατηρούμε ότι η μέθοδος των επιπεδοσυνόλων χειρίζεται με φυσικό τρόπο αλλαγές στην τοπολογία (δες και το σχήμα 1.3).

Όπως προκύπτει με μεθόδους διαφορικής γεωμετρίας, χαρακτηριστικά της καμπύλης, όπως τα $\kappa, \vec{N}$ υπολογίζονται κατευθείαν από την u. Πιο συγκεκριμένα, ισχύουν οι εκφράσεις:

$$\vec{N} = -\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \tag{1.13}$$

και

$$\kappa = -\nabla \cdot \vec{N} = \operatorname{div}\Big(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}\Big) = \frac{u_{xx}u_y^2 - 2u_x u_y u_{xy} + u_{yy}u_x^2}{(u_x^2 + u_y^2)^{3/2}} \tag{1.14}$$

Για να παράγουμε ένα νόμο για την κίνηση της καμπύλης αντίστοιχο της εξίσωσης (1.12), παρατηρούμε ότι $u(C(q,t),t) = 0$. Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως προς t και κάνοντας χρήση του κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε[3] $u_t + C_t \cdot \nabla u = 0$. Αντικαθιστώντας το C_t από την (1.12) προκύπτει $u_t + F\vec{N} \cdot \nabla u = 0$. Όμως από την (1.13) έχουμε ότι $\vec{N} \cdot \nabla u = -\|\nabla u\|$. Έτσι καταλήγουμε στη βασική σχέση (πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών) που πρέπει να ικανοποιεί η u για να εξελίσει την καμπύλη με το σωστό τρόπο:

$$\begin{cases} u_t = F\|\nabla u\| \\ u(x,y,0) = 0 \text{ για } (x,y) \in \Gamma(0) \end{cases} \tag{1.15}$$

Από τη σχέση αυτή μπορέσαμε, με βάση την εξίσωση (1.9), που δίνει την κίνηση των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων με τον Lagrangian φορμαλισμό, να εξάγουμε την εξίσωση (1.10) που περιγράφει την ίδια κίνηση με φορμαλισμό επιπεδοσυνόλων. Αξίζει να σημειώσουμε εδώ ότι η ταχύτητα F της εξίσωσης (1.15) είναι η επέκταση σε ολόκληρο το επίπεδο της ταχύτητας διάδοσης του μετώπου F της εξίσωσης (1.12). Ο τρόπος που θα γίνει η επέκταση, ενώ θεωρητικά δεν επηρεάζει τη λύση, μπορεί να επηρεάσει την ακρίβεια της αριθμητικής επίλυσης. Η επέκταση αυτή είτε προκύπτει αβίαστα από το φυσικό πρόβλημα, είτε πρέπει να γίνει explicitly [31],[3],[17]. Το ζήτημα αυτό δε θα μας απασχολήσει στη συνέχεια της παρούσας εργασίας, επειδή στη δική μας περίπτωση η επέκταση προκύπτει άμεσα από το φυσικό πρόβλημα.

Μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση κίνησης καμπύλης προκύπτει όταν η συνάρτηση ταχύτητας F διατηρεί πρόσημο (είναι δηλαδή είτε πάντα θετική είτε πάντα αρνητική) και επιπλέον εξαρτάται μόνο από τις χωρικές συντεταγμένες, δηλαδή $F = F(\vec{x})$. Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις η καμπύλη επισκέπτεται κάθε σημείο μονάχα μια φορά (δεχόμαστε την entropy satisfying viscosity solution της (1.15) – δες Κεφάλαιο 2) και το μέτωπο μπορεί να καθοριστεί από το σύνολο των σημείων στα οποία βρίσκεται η καμπύλη ύστερα από

[3] Στο εξής θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $f_t \equiv \frac{\partial f}{\partial t}$.

χρόνο t, δηλαδή $\Gamma(t) = \{(x,y) : T(x,y) = t\}$. Η PDE που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση T προκύπτει με παραγώγιση ως προς t της σχέσης $T(C(x,y)) = t$, που δίνει τελικά, λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις (1.12), (1.13) και (1.14),

$$\begin{cases} \|\nabla T\| F(x,y) = 1 \\ T(x,y) = 0 \text{ για } (x,y) \in \Gamma(0) \end{cases} \tag{1.16}$$

Αυτό είναι ένα πρόβλημα καθαρά συνοριακών τιμών, γνωστό στη μαθηματική φυσική ως eikonal PDE [21], με εφαρμογές στην οπτική [10], στον υπολογισμό του (γκρίζου) μετασχηματισμού απόστασης [67] και αλλού. Για την επίλυση του προβλήματος (1.16) έχουν ανακαλυφθεί πολύ γρήγοροι αλγόριθμοι, που θα παρουσιαστούν στο Κεφάλαιο 2.

Κεφάλαιο 2

Βασικές Αριθμητικές Μέθοδοι για την Εξέλιξη Επιπεδοσυνόλων

2.1 Βασικές έννοιες αριθμητικών μεθόδων για μερικές διαφορικές εξισώσεις

Η συντριπτική πλειοψηφία των μοντέλων μερικών διαφορικών εξισώσεων που έχουν προταθεί στην Όραση Υπολογιστών οδηγεί σε μαθηματικά προβλήματα που δεν είναι επιλύσιμα αναλυτικά. Η επίλυση με αριθμητικές μεθόδους είναι η μόνη διέξοδος σε αυτές τις περιπτώσεις. Σε αυτήν την ενότητα θα αναφερθούμε σε μερικές έννοιες από την αριθμητική ανάλυση PDEs, χωρίς βέβαια να φιλοδοξούμε να καλύψουμε σε βάθος την τεράστια αυτή επιστημονική περιοχή.

2.1.1 Κατηγοριοποίηση μερικών διαφορικών εξισώσεων

Μια σημαντική έννοια από την αριθμητική ανάλυση είναι η κατηγοριοποίηση των PDEs σε τρεις οικογένειες: *υπερβολικές, παραβολικές* και *ελλειπτικές*. Η κατηγοριοποίηση γίνεται με βάση τις καμπύλες διάδοσης της πληροφορίας (*χαρακτηριστικές καμπύλες*) που αντιστοιχούν στην εξίσωση. Αντί να αναφέρουμε το ακριβές κριτήριο για την κατηγοριοποίηση των εξισώσεων (δες π.χ. [5]), θα δώσουμε τους πιο απλούς εκπροσώπους κάθε κατηγορίας στην περίπτωση των ημιγραμμικών PDEs β′ βαθμού.

Η κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

είναι χαρακτηριστικός εκπρόσωπος των υπερβολικών εξισώσεων. Η εξίσωση (2.1) και γενικότερα οι υπερβολικές εξισώσεις περιγράφουν φυσικά φαινόμενα που χαρακτηρίζονται από χρονική εξέλιξη αντιστρεπτή στο χρόνο. Από κάθε σημείο του θεμελιώδους πεδίου διέρχονται δύο χαρακτηριστικές καμπύλες, μία με κατεύθυνση το παρελθόν και μία με κατεύθυνση το μέλλον.

Όπως είδαμε και στην ενότητα 1.2, βασικός εκπρόσωπος της παραβολικής οικογένειας είναι η εξίσωση διάχυσης

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(g(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) \tag{2.2}$$

Εκεί τονίσαμε επίσης το γεγονός ότι περιγράφει μη-αντιστρεπτά φαινόμενα που εξελίσσονται στο χρόνο. Αυτό πηγάζει από το γεγονός ότι έχει μόνο μία χαρακτηριστική καμπύλη με κατεύθυνση προς το μέλλον.

Τέλος, τα στατικά φαινόμενα περιγράφονται συνήθως με εξισώσεις ελλειπτικού τύπου. Έτσι, για παράδειγμα, το ηλεκτρικό δυναμικό σε χώρο χωρίς πηγές δίνεται από τη λύση της εξίσωσης Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{2.3}$$

Σε αυτήν την περίπτωση, επειδή ακριβώς δεν έχουμε χρονική εξέλιξη των φαινομένων, δεν υπάρχει καμία χαρακτηριστική καμπύλη.

Στην περίπτωση των υπερβολικών και παραβολικών εξισώσεων που περιγράφουν φαινόμενα εξελισσόμενα στο χρόνο πρέπει απαραίτητα να καθορίζουμε και τις αρχικές τιμές της συνάρτησης (και ίσως τις συνοριακές συνθήκες, εάν το χωρίο είναι πεπερασμένο), έχουμε δηλαδή προβλήματα αρχικών τιμών ή προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών. Αντίθετα στην περίπτωση των ελλειπτικών εξισώσεων έχουμε προβλήματα αποκλειστικά συνοριακών τιμών.

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι τα αριθμητικά σχήματα που χρησιμοποιούμε για την επίλυση των εξισώσεων θα πρέπει να σέβονται το γεγονός ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι παράλληλες προς την κατεύθυνση διάδοσης της πληροφορίας στο φυσικό πρόβλημα και να επιβάλλουν ανάλογη διάδοση της πληροφορίας και στη διακριτοποίηση του φυσικού προβλήματος. Τέτοια αριθμητικά σχήματα ονομάζονται upwind σχήματα, παίζουν μεγάλο ρόλο στη διακριτοποίηση υπερβολικών εξισώσεων και θα μελετηθούν στην υποενότητα που ακολουθεί.

2.1.2 Πεπερασμένες διαφορές και upwind σχήματα

Προκειμένου να επιλύσουμε αριθμητικά ένα πρόβλημα μερικών διαφορικών εξισώσεων θα πρέπει πρώτα να το διακριτοποιήσουμε. Υπάρχουν δύο βασικές μέθοδοι για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο. Η μέθοδος των *πεπερασμένων στοιχείων (finite elements)* (δες π.χ. το [5]) προσπαθεί να εκφράσει τη λύση ως ένα γραμμικό συνδυασμό κατάλληλων συναρτήσεων βάσης και στη συνέχεια υπολογίζει το βέλτιστο σύνολο συντελεστών με χρήση μιας μεταβολικής μορφής της διαφορικής εξίσωσης. Στην παρούσα εργασία δε χρησιμοποιήσαμε αυτήν τη μέθοδο και γι' αυτό δε θα επεκταθούμε στην περιγραφή της.

Η μέθοδος των *πεπερασμένων διαφορών (finite differences)* [5] από την άλλη πλευρά βασίζεται στη διακριτοποίηση του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. Ακολουθώντας αυτήν τη μέθοδο τοποθετούμε στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης ένα πεπερασμένο πλέγμα και αναπαριστούμε τη $u(x, y, t)$ με τις τιμές u_{ij}^n, έτσι ώστε $u_{ij}^n \simeq u(ih_x, jh_y, n\tau)$, όπου τα h_x, h_y και τ είναι τα βήματα διακριτοποίησης.

Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών πήρε το όνομά της από το γεγονός ότι οι παράγωγοι που παρουσιάζονται στις διαφορικές εξισώσεις προσεγγίζονται με κατάλληλες πεπερασμένες διαφορές. Αυτές προκύπτουν από τα αναπτύγματα Taylor της $u(x, y, t)$. Για παράδειγμα από το ανάπτυγμα

$$u(x, y, t+\tau) = u(x, y, t) + u_t(x, y, t)\tau + O(\tau^2) \tag{2.4}$$

προκύπτει η σχέση

$$u_t(x, y, t) = \frac{u(x, y, t+\tau) - u(x, y, t)}{\tau} + O(\tau) \tag{2.5}$$

Θεωρώντας αντίστοιχα αναπτύγματα μπορούμε να παράγουμε τις *πλευρικές (sided)* προσεγγίσεις πρώτης τάξης για τη u_t:

$$u_t \simeq D^{+t}u \equiv \frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}{\tau} \quad \text{(εμπρόσθια διαφορά)} \tag{2.6α$'$}$$

$$u_t \simeq D^{-t}u \equiv \frac{u_{ij}^{n} - u_{ij}^{n-1}}{\tau} \quad \text{(οπίσθια διαφορά)} \tag{2.6β$'$}$$

και την *κεντρική (central)* προσέγγιση δεύτερης τάξης για τη u_t:

$$u_t \simeq D^{0t}u \equiv \frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^{n-1}}{2\tau} \tag{2.7}$$

Με τον ίδιο τρόπο ορίζονται οι αντίστοιχες διαφορές για την προσέγγιση των χωρικών παραγώγων.

Η επιλογή της κατάλληλης διαφοράς για την προσέγγιση μιας παραγώγου πρέπει, πέρα από την επιθυμητή ακρίβεια του σχήματος, να λαμβάνει υπόψη της τις ιδιαιτερότητες του προβλήματος και επηρεάζει κατά πολύ τις ιδιότητες του αριθμητικού σχήματος. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την εξίσωση κύματος πρώτου βαθμού σε μία διάσταση:

$$u_t + cu_x = 0 \tag{2.8}$$

Εάν διαλέξουμε να διακριτοποιήσουμε τη u_t με εμπρόσθια διαφορά και άρα έχουμε ένα *explicit* στο χρόνο αριθμητικό σχήμα[1], μπορούμε να επιλέξουμε ανάμεσα σε τρία διαφορετικά σχήματα πρώτης τάξης, ανάλογα με τη διακριτοποίηση της χωρικής παραγώγου:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - c\tau D^{+x} u_i^n \qquad \text{(εμπρόσθιο σχήμα)} \tag{2.9α'}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - c\tau D^{-x} u_i^n \qquad \text{(οπίσθιο σχήμα)} \tag{2.9β'}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - c\tau D^{0x} u_i^n \qquad \text{(κεντρικό σχήμα)} \tag{2.9γ'}$$

Για να επιλέξουμε το κατάλληλο από τα σχήματα της (2.9) θα πρέπει σκεφθούμε ότι το φυσικό πρόβλημα που περιγράφεται στην (2.8) είναι ένα κύμα που κινείται με ταχύτητα c. Έτσι, εάν $c > 0$ έχουμε κίνηση προς τα δεξιά και θα πρέπει να επιλέξουμε οπίσθιο σχήμα, που διαδίδει την αριθμητική πληροφορία προς τα δεξιά. Εάν πάλι $c < 0$ έχουμε κίνηση προς τα αριστερά και κατάλληλο είναι το εμπρόσθιο σχήμα. Η επιλογή με αυτό το κριτήριο οδηγεί στα λεγόμενα *upwind σχήματα (upwind schemes)*. Αυτές οι ιδέες απεικονίζονται στο σχήμα 2.1. Συνεπώς το κατάλληλο upwind σχήμα για την (2.8) είναι το

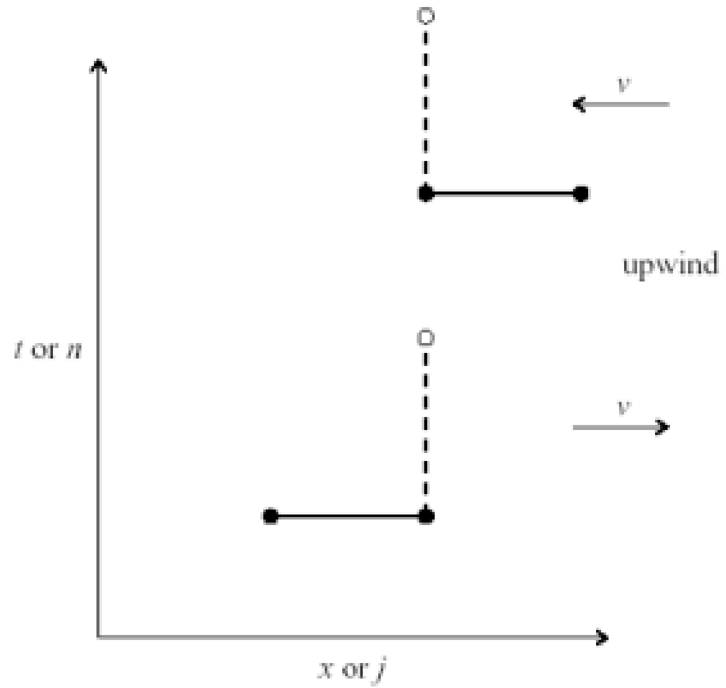
$$u_i^{n+1} = u_i^n - \tau\big(\min(c,0)D^{+x}u_i^n + \max(c,0)D^{-x}u_i^n\big) \tag{2.10}$$

Τυχόν διαφορετική επιλογή θα οδηγούσε σε μη-ευσταθή σχήματα, όπως θα δούμε στην επόμενη υποενότητα.

2.1.3 Συνέπεια, σύγκλιση και ευστάθεια αριθμητικών σχημάτων

Θα εξετάσουμε τώρα κάποιες βασικές ιδέες που είναι χρήσιμες για την αξιολόγηση αριθμητικών σχημάτων για PDEs. Καταρχήν αποσαφηνίζουμε ότι ενδιαφερόμαστε για τη λύση προβλημάτων που είναι *καλά ορισμένα (well posed)*. Πρόκειται για προβλήματα που έχουν μοναδική λύση, που εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τις αρχικές/συνοριακές συνθήκες (ύπαρξη, μοναδικότητα, συνεχής εξάρτηση). Έξω από αυτό το πλαίσιο δεν μπορούμε να ελπίζουμε ότι θα βρούμε ένα π.χ. ευσταθές αριθμητικό σχήμα, τη στιγμή που το ίδιο το συνεχές πρόβλημα είναι μη-ευσταθές.

[1]Ονομάζεται explicit γιατί η λύση για το χρονικό βήμα $n+1$ δίνεται κατευθείαν από τη λύση στο χρονικό βήμα n, σε αντιδιαστολή με το implicit, όπου η λύση για το χρονικό βήμα $n+1$ είναι σε πεπλεγμένη μορφή και απαιτείται η επίλυση ενός αλγεβρικού συστήματος για να τη βρούμε.



Σχήμα 2.1: Το upwind σχήμα για την κυματική εξίσωση. Το πάνω σχήμα (εμπρόσθιο) είναι ευσταθές όταν η μεταφορική ταχύτητα c είναι αρνητική. Το κάτω σχήμα (οπίσθιο) είναι ευσταθές όταν η μεταφορική ταχύτητα c είναι θετική. Από το [60].

Ένα αριθμητικό σχήμα είναι *συνεπές (consistent)* με μια PDE όταν έχει ανάπτυγμα Taylor συμβατό με αυτή καθώς εκλεπτύνουμε το πλέγμα διακριτοποίησης.

Το πιο επιθυμητό χαρακτηριστικό ενός αριθμητικού σχήματος είναι η *σύγκλιση (convergence)*. Λέμε ότι ένα αριθμητικό σχήμα συγκλίνει στην ακριβή λύση μιας PDE, όταν το σφάλμα διακριτοποίησης τείνει στο 0 καθώς τα $h, k \to 0$.

Ένας ορισμός για *την ευστάθεια (stability)* ενός αριθμητικού σχήματος είναι να οδηγεί σε διακριτή λύση u_{ij}^n που να είναι φραγμένη, καθώς ο χρόνος $n \to \infty$.

Οι έννοιες της συνέπειας, της σύγκλισης και της ευστάθειας συνδέονται μεταξύ τους σύμφωνα με το παρακάτω βασικό θεώρημα, την απόδειξη του οποίου ο αναγνώστης μπορεί να βρει π.χ. στο [61]:

Θεώρημα 2.1 (Θεώρημα ισοδυναμίας του Lax). *Έστω ένα καλά ορισμένο γραμμικό πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών. Μια συνεπής προσέγγισή του με πεπερασμένες διαφορές είναι συγκλίνουσα αν, και μόνο αν, είναι ευσταθής.*

Αυτό το θεώρημα καταδεικνύει τον ιδιαίτερο ρόλο που παίζει η ευστάθεια στην αξιολόγηση των αριθμητικών σχημάτων.

Στην επόμενη υποενότητα θα δούμε δύο μεθόδους που χρησιμοποιούνται ευρύτατα για τον έλεγχο της ευστάθειας αριθμητικών σχημάτων. Πρόκειται για την ανάλυση ευστάθειας Von Neumann και την ανάλυση ευστάθειας με πίνακα.

2.1.4 Έλεγχος ευστάθειας αριθμητικών σχημάτων

Ανάλυση ευστάθειας Von Neumann

Στην *ανάλυση ευστάθειας Von Neumann (Von Neumann stability analysis)*, που μπορεί να εφαρμοστεί σε γραμμικά προβλήματα με σταθερούς συντελεστές, θεωρούμε την εξέλιξη κάθε ιδιολύσης της εξίσωσης πεπερασμένων διαφορών ξεχωριστά. Όταν έχουμε μία χωρική διάσταση, οι ιδιολύσεις έχουν τη μορφή:

$$v_i^n = \xi^n e^{-jkih_x}, \tag{2.11}$$

όπου $j = \sqrt{-1}$ και $k = 2\pi/\lambda$ ο κυματαριθμός της συγκεκριμένης ιδιολύσης.

Αντικαθιστώντας τη μορφή αυτή για το v_i^n στην εξίσωση που περιγράφει το αριθμητικό σχήμα που θέλουμε να αξιολογήσουμε παίρνουμε μια σχέση διασποράς που συνδέει τα ξ και k. Το κριτήριο Von Neumann για ευστάθεια είναι τότε $|\xi| \leq 1$ για όλα τα k.

Ας εφαρμόσουμε αυτές τις ιδέες προκειμένου να αξιολογήσουμε για παράδειγμα τα τρία σχήματα της σχέσης (2.9) για την εξίσωση κύματος (2.8), υποθέτοντας σταθερή ταχύτητα $c > 0$. Με αντικατάσταση στις σχέσεις (2.9) παίρνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις για το ξ:

$$|\xi|^2 = 1 + 2\sigma(1+\sigma)(1-\cos(kh_x)) \qquad \text{(εμπρόσθιο σχήμα)} \tag{2.12α'}$$
$$|\xi|^2 = 1 - 2\sigma(1-\sigma)(1-\cos(kh_x)) \qquad \text{(οπίσθιο σχήμα)} \tag{2.12β'}$$
$$|\xi|^2 = 1 + \sigma^2 \sin^2(kh_x) \qquad \text{(κεντρικό σχήμα)} \tag{2.12γ'}$$

με $\sigma = c\tau/h_x$. Από την απαίτηση $|\xi| \leq 1$ προκύπτει αμέσως ότι από τα τρία σχήματα μόνο το οπίσθιο (upwind στην περίπτωση αυτή) είναι ευσταθές, και μάλιστα υπό τη συνθήκη $\sigma \leq 1$, που γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{|c|\tau}{h_x} \leq 1 \tag{2.13}$$

Αυτή η σχέση είναι γνωστή ως *συνθήκη CFL (CFL condition)* από τα αρχικά των Courant-Friedrichs-Lewy που την ανακάλυψαν και βάζει ένα όριο στο χρονικό βήμα για τα explicit αριθμητικά σχήματα στην επίλυση υπερβολικών PDEs. Διαισθητικά δηλώνει ότι το μέτωπο του κύματος μπορεί να διασχίζει απόσταση το πολύ ίση με το χωρικό βήμα διακριτοποίησης σε κάθε χρονικό βήμα.

Ανάλυση ευστάθειας με πίνακα

Η μέθοδος της *ανάλυσης ευστάθειας με πίνακα (matrix stability analysis)* είναι μια εναλλακτική μέθοδος για την αξιολόγηση της ευστάθειας ενός αριθμητικού σχήματος που βασίζεται στη φασματική ανάλυση ενός πίνακα. Αυτή η μέθοδος είναι ιδιαίτερα σημαντική για την παρούσα εργασία επειδή μας εισάγει σε έννοιες και μαθηματικά εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε σε όλα τα επόμενα κεφάλαια.

Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι το σχήμα πεπερασμένων διαφορών που θέλουμε να μελετήσουμε για ένα πρόβλημα αρχικών–συνοριακών τιμών δίνει την εξέλιξη της αριθμητικής λύσης στη μορφή

$$u^{n+1} = Gu^n + d^n \tag{2.14}$$

Το u^n είναι το διάνυσμα της λύσης στο χρονικό βήμα n και προκύπτει με κατάλληλη αρίθμηση των χωρικών συντεταγμένων, π.χ. αντιστοιχώντας την i–συνιστώσα του u^n στην τιμή u_i^n στη μονοδιάστατη περίπτωση. Ο G είναι ένας $N \times N$ πίνακας που εξαρτάται από την επιλογή του αριθμητικού σχήματος και το d^n είναι ένα διάνυσμα που εξαρτάται από τις συνοριακές συνθήκες. Εφαρμόζοντας αναδρομικά τη σχέση (2.14) οδηγούμαστε στη σχέση

$$u^n = G^n u^0 + G^{n-1} d^0 + G^{n-2} d^1 + \cdots + d^{n-1} \tag{2.15}$$

Προκειμένου να επικεντρώσουμε την προσοχή μας στο αριθμητικό σχήμα και όχι στις συνοριακές συνθήκες, θεωρούμε ότι στο διάνυσμα αρχικών συνθηκών u^0 υπεισέρχεται ένα σφάλμα e^0, οπότε έχουμε το διαταραγμένο διάνυσμα αρχικών συνθηκών $\tilde{u}^0 = u^0 + e^0$. Το σφάλμα $e^n = \tilde{u}^n - u^n$ διαδίδεται τότε σύμφωνα με τη σχέση:

$$e^n = \tilde{u}^n - u^n \overset{(2.15)}{=} G^n(\tilde{u}^0 - u^0) = G^n e^0 \tag{2.16}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η συμπεριφορά του σφάλματος στη συνέχεια των υπολογισμών εξαρτάται από τις δυνάμεις του πίνακα G.

Για να προχωρήσουμε στην ανάλυσή μας, θεωρούμε τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ του G σε φθίνουσα κατά απόλυτη τιμή σειρά, δηλαδή

$$|\lambda_s| \geq |\lambda_{s+1}| \text{ για } s = 1, \ldots, N-1 \tag{2.17}$$

Ορίζουμε ως *φασματική ακτίνα (spectral radius)* $\rho(G)$ του πίνακα G το $|\lambda_1|$, δηλαδή:

$$\rho(G) = \max_s |\lambda_s| = |\lambda_1| \tag{2.18}$$

Μπορούμε να εκφράσουμε τώρα το ακόλουθο θεώρημα, που είναι πολύ βασικό στην ανάλυση επαναληπτικών αριθμητικών μεθόδων (για μια μορφή του θεωρήματος για γενικότερη μορφή πινάκων δες το [61]):

Θεώρημα 2.2. *Έστω ότι ο πίνακας G έχει N γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους ιδιοδιανύσματα (αυτό ισχύει π.χ. για πραγματικούς συμμετρικούς πίνακες). Θεωρούμε την ακολουθία $G^k, k = 0, 1, \dots$. Η ακολουθία αυτή:*

(i) συγκλίνει στο μηδενικό πίνακα αν, και μόνο αν, $\rho(G) < 1$.

(ii) παραμένει φραγμένη ως προς μια φυσική νόρμα πίνακα $\|\cdot\|_p$ αν, και μόνο αν, $\rho(G) \leq 1$.

Απόδειξη. Ο πίνακας G διαγωνοποιείται αφού έχει N γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους ιδιοδιανύσματα. Θεωρούμε τη διαγωνοποίηση $G = XDX^{-1}$, με $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$. Τότε $G^k = XD^kX^{-1}$, με $D^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_N^k)$.

Αν $\rho(G) < 1$, έπεται ότι $|\lambda_s| \leq \rho(G) < 1$, οπότε $\lambda_s^k \to 0$. Έτσι $D^k \to 0$, που σημαίνει ότι και $G^k = XD^kX^{-1} \to 0$.

Αν $\rho(G) \leq 1$, έπεται ότι $|\lambda_s| \leq \rho(G) \leq 1$, οπότε $|\lambda_s^k| \leq |\lambda_s|$. Έτσι:

$$
\begin{aligned}
\|D^k\|_p &= \min_{\|v\|_p=1} \|D^k v\|_p \\
&= \min_{\|v\|_p=1} \|(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_N^k) \cdot (v_1, v_2, \dots, v_N)^T\|_p \\
&\overset{\mathrm{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \|(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_N^k)\|_p \\
&\leq [|\lambda_1^k|^p + |\lambda_2^k|^p + \cdots + |\lambda_N^k|^p]^{1/p} \\
&\leq [|\lambda_1|^p + |\lambda_2|^p + \cdots + |\lambda_N|^p]^{1/p} \\
&= \|(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)\|_p
\end{aligned}
$$

Δηλαδή η νόρμα $\|D^k\|_p$ είναι φραγμένη, οπότε και η $\|G^k\|_p = \|XD^kX^{-1}\|_p \leq \|X\|_p \|D^k\|_p \|X^{-1}\|_p$ είναι φραγμένη.

Αντίστροφα, θεωρούμε ότι το v_1 είναι το κανονικοποιημένο ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_p$ ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή μέγιστης απόλυτης τιμής λ_1. Τότε έχουμε

$$G^k v_1 = \lambda_1^k v_1,$$

οπότε, παίρνοντας τη νόρμα $\|\cdot\|_p$ έχουμε

$$|\lambda_1|^k = \|G^k v_1\|_p \leq \|G^k\|_p \|v_1\|_p$$

Αν $G^k \to 0$, τότε $\|G^k\|_p \to 0$, οπότε από την προηγούμενη σχέση έπεται $\rho(G) = |\lambda_1| < 1$. Αν πάλι το $\|G^k\|$ είναι φραγμένο τότε από την προηγούμενη σχέση και το $|\lambda_1|^k$ είναι φραγμένο, οπότε $\rho(G) = |\lambda_1| \leq 1$. □

Μπορούμε τώρα να χαρακτηρίσουμε ένα σχήμα ευσταθές, όταν το σφάλμα e^n της εξίσωσης (2.16) παραμένει φραγμένο για $n \to \infty$ και για οποιοδήποτε e^0. Φτάνουμε έτσι στο ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 2.3. *Έστω ότι ο πίνακας G της (2.14) έχει N γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους ιδιοδιανύσματα. Το αριθμητικό σχήμα (2.14) είναι ευσταθές αν, και μόνο αν, $\rho(G) \leq 1$.*

Στη συνέχεια θα μας χρειαστεί και το ακόλουθο λήμμα, την απόδειξη του οποίου ο αναγνώστης μπορεί να βρεί π.χ. στο [24]:

Λήμμα 2.4. *Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας A και λ μια ιδιοτιμή του που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα v. Έστω επίσης ότι τα f_1, f_2 είναι πολυώνυμα. Τότε ο πίνακας $[f_1(A)]^{-1} f_2(A)$ έχει ιδιοτιμή το $f_2(\lambda)/f_1(\lambda)$ και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το v. Το ίδιο ισχύει και για τον πίνακα $f_2(A)[f_1(A)]^{-1}$.*

Ας θεωρήσουμε τώρα την ισοτροπική εξίσωση διάχυσης θερμότητας σε μία διάσταση με αδιαβατικές συνοριακές συνθήκες:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.19}$$

με $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ για $x = 0$ και για $x = 1$.

Θα διερευνήσουμε με τη μέθοδο του πίνακα την ευστάθεια του explicit σχήματος πεπερασμένων διαφορών για την (2.19):

$$u_i^{n+1} = u_i^n + r(u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n) \tag{2.20}$$

με $r = \tau/h^2$. Η συνοριακή συνθήκη δίνει επιπλέον $u_0^n = u_1^n$ και $u_N^n = u_{N+1}^n$.

Αυτό το σχήμα μπορεί να γραφεί στη μορφή εξίσωσης πινάκων (2.14), με $G = I + rS$ και $d = 0$, όπου S είναι ο παρακάτω τριδιαγώνιος πίνακας:

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα S προκύπτουν από τη σχέση $(S - \lambda I)v = 0$. Αυτή η σχέση οδηγεί στην ακόλουθη εξίσωση διαφορών που πρέπει να ικανοποιούν οι συνιστώσες $\{v_i : i = 1, \ldots, N\}$ του ιδιοδιανύσματος $v = (v_1, v_2, \ldots, v_N)^T$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ:

$$v_{i-1} - (2 + \lambda)v_i + v_{i+1} = 0 \text{ για } i = 1, \ldots, N \tag{2.22}$$

έχοντας ορίσει $v_1 = v_0$, $v_{N+1} = v_N$. Η επίλυση της εξίσωσης διαφορών (2.22) μας δίνει τελικά τις ιδιοτιμές:

$$\lambda_s = -4\sin^2(\frac{s\pi}{2N}) \text{ για } s = 0, \ldots, N-1 \tag{2.23}$$

Στην ιδιοτιμή λ_s αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα v_s με συνιστώσες:

$$(v_i)_s = \cos\left(\frac{s\pi(2i-1)}{2N}\right) \text{ για } i = 1, \ldots, N \tag{2.24}$$

Από το Λήμμα (2.4), οι ιδιοτιμές l_s του πίνακα $G = I + rS$ συνδέονται με τις ιδιοτιμές λ_s του πίνακα S με τη σχέση $l_s = 1 + r\lambda_s$, ενώ τα ιδιοδιανύσματα είναι τα ίδια. Συνεπώς έχουμε

$$l_s = 1 - 4r\sin^2(\frac{s\pi}{2N}) \text{ για } s = 0, \ldots, N-1 \tag{2.25}$$

Η συνθήκη για ευστάθεια $\rho(G) \leq 1$ γράφεται τότε:

$$\max_{0\leq s<N}|l_s| = \max_{0\leq s<N}|1 - 4r\sin^2(\frac{s\pi}{2N})| \leq 1 \tag{2.26}$$

που δίνει

$$r \leq \frac{1}{2sin^2(\frac{(N-1)\pi}{2N})} \tag{2.27}$$

Καθώς το βήμα διακριτοποίησης $h \to 0, N \to \infty$, έχουμε $(N-1)\pi/(2N) \to \pi/2$, οπότε προκύπτει τελικά το ακόλουθο κριτήριο ευστάθειας:

$$r = \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2} \tag{2.28}$$

Παρατηρούμε από τη σχέση (2.28) ότι ο περιορισμός στο χρονικό βήμα για το explicit σχήμα που αντιστοιχεί στην εξίσωση διάχυσης απαιτεί $\tau \sim h^2$, που είναι ακόμα πιο αυστηρός από τη συνθήκη CFL (2.13) για υπερβολικές εξισώσεις, όπου $\tau \sim h$. Αυτός ο περιορισμός θα αρθεί με τα implicit σχήματα που θα μελετήσουμε στο Κεφάλαιο 4.

2.2 Αριθμητικά σχήματα για επιπεδοσύνολα

2.2.1 Σχήματα δανεισμένα από υπερβολικούς νόμους διατήρησης

Θεωρούμε ξανά τη βασική εξίσωση κίνησης για επιπεδοσύνολα (1.15), $u_t = F\|\nabla u\|$, όπου F είναι η ταχύτητα κάθετα στο μέτωπο. Αυτή η εξίσωση μπορεί να γραφεί σε μορφή Hamilton-Jacobi:

$$u_t + H(u_x, u_y) = 0 \tag{2.29}$$

με Χαμιλτονιανή $H(u_x, u_y) = -F\sqrt{u_x^2 + u_y^2}$. Τέτοιες εξισώσεις επιδέχονται γενικευμένες λύσεις, τις λεγόμενες *λύσεις ιξώδους (viscosity solutions)* [22], που είναι συναρτήσεις συνεχείς, χωρίς όμως να είναι παντού λείες, ικανοποιούν μια γενικευμένη μορφή της (2.29) και επίσης σέβονται τη συνθήκη εντροπίας [67].

Οι Osher και Sethian στο [55] προτείνουν μια σειρά από αριθμητικά σχήματα για την εξίσωση (1.15), βασισμένα στη θεωρία των αριθμητικών μεθόδων για *υπερβολικούς νόμους διατήρησης (hyperbolic conservation laws)*, που συνδέεται στενά με τις εξισώσεις Hamilton-Jacobi. Πιο συγκεκριμένα, για κυρτή Χαμιλτονιανή $H = -F\sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ (π.χ. F σταθερή), προτείνουν το ακόλουθο explicit σχήμα για την εξέλιξη της λύσης στο χρόνο:

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n + \tau[\max(F_{ij}, 0)\nabla^+ + \min(F_{ij}, 0)\nabla^-], \tag{2.30}$$

όπου τ είναι το χρονικό βήμα και τα ∇^+, ∇^- είναι οι ακόλουθες προσεγγίσεις του $\|\nabla u\|$, που σέβονται τη συνθήκη εντροπίας (χρησιμοποιούμε εδώ την προσέγγιση των Rouy-Tourin [62], που είναι πιο ακριβής από αυτήν του [55] κοντά στα σημεία που αναπτύσσονται shocks στη συνάρτηση):

$$\nabla^+ = \left\{ \max{}^2[D_{ij}^{-x}, -D_{ij}^{+x}, 0] + \max{}^2[D_{ij}^{-y}, -D_{ij}^{+y}, 0] \right\}^{1/2} \tag{2.31α'}$$

$$\nabla^- = \left\{ \max{}^2[-D_{ij}^{-x}, D_{ij}^{+x}, 0] + \max{}^2[-D_{ij}^{-y}, D_{ij}^{+y}, 0] \right\}^{1/2} \tag{2.31β'}$$

Τα $D_{ij}^{\pm x}$ και $D_{ij}^{\pm y}$ είναι προσεγγίσεις των u_x και u_y, αντίστοιχα, με τις πλευρικές διαφορές της εξίσωσης (2.6).

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι, προκειμένου η επαναληπτική διαδικασία (2.30) να είναι ευσταθής, το χρονικό βήμα θα πρέπει να περιορίζεται από μια σχέση ανάλογη της συνθήκης CFL (2.13):

$$\tau \leq \frac{0.5}{(\max_{ij} F_{ij})(1/\Delta x + 1/\Delta y)} \tag{2.32}$$

Αυτή η σχέση για $\Delta x = \Delta y = 1$ και $\max_{ij} F_{ij} = 1$ μας δίνει $\tau_{max} = 0.25$, που σημαίνει ότι μπορεί να χρειαστούν χιλιάδες επαναλήψεις της διαδικασίας (2.30) μέχρι να φτάσουμε στην τελική μορφή της καμπύλης που εξελίσσουμε. Αυτόν ακριβώς τον περιορισμό στο χρονικό βήμα προσπαθούμε να αποφύγουμε στα Κεφάλαια 4 και 5, κάνοντας χρήση implicit αριθμητικών σχημάτων, τα οποία όμως απαιτούν την επίλυση ενός μεγάλου αλγεβρικού συστήματος σε κάθε βήμα εξέλιξης της καμπύλης.

2.2.2 Ένα explicit σχήμα για γενική μορφή ταχύτητας

Ας θεωρήσουμε τώρα μια γενικότερη μορφή κίνησης για την καμπύλη (βλ. το [67]). Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι η καμπύλη, πέρα από το να διαστέλλεται ή συστέλλεται με ταχύτητα $F_{prop} = F_0(x,y)$ (αυτή είναι η περίπτωση που μόλις αντιμετωπίσαμε), υφίσταται επίσης μια μεταφορική (advective) ταχύτητα, με συνιστώσα κάθετη στην καμπύλη $F_{adv} = -\vec{U}(x,y,t)\cdot\vec{N}$ (μπορούμε να φανταστούμε ότι η καμπύλη επιπλέει σε ένα υγρό που κινείται με ταχύτητα $-\vec{U}(x,y,t)$). Έστω, τέλος, ότι η καμπύλη κινείται και με ταχύτητα $F_{curv} = \epsilon(x,y)\kappa$ ανάλογη της καμπυλότητάς της σε κάθε σημείο.

Το συνολικό μοντέλο, με συνισταμένη ταχύτητα $F = F_{prop} + F_{adv} + F_{curv}$ δίνει την εξίσωση (αντικαθιστούμε την F στον τύπο (1.15), λαμβάνοντας υπόψη ότι $\vec{N} = -\nabla u/\|\nabla u\|$):

$$u_t = F_0\|\nabla u\| + \vec{U}(x,y,t)\cdot\nabla u + \epsilon(x,y)\kappa\|\nabla u\| \tag{2.33}$$

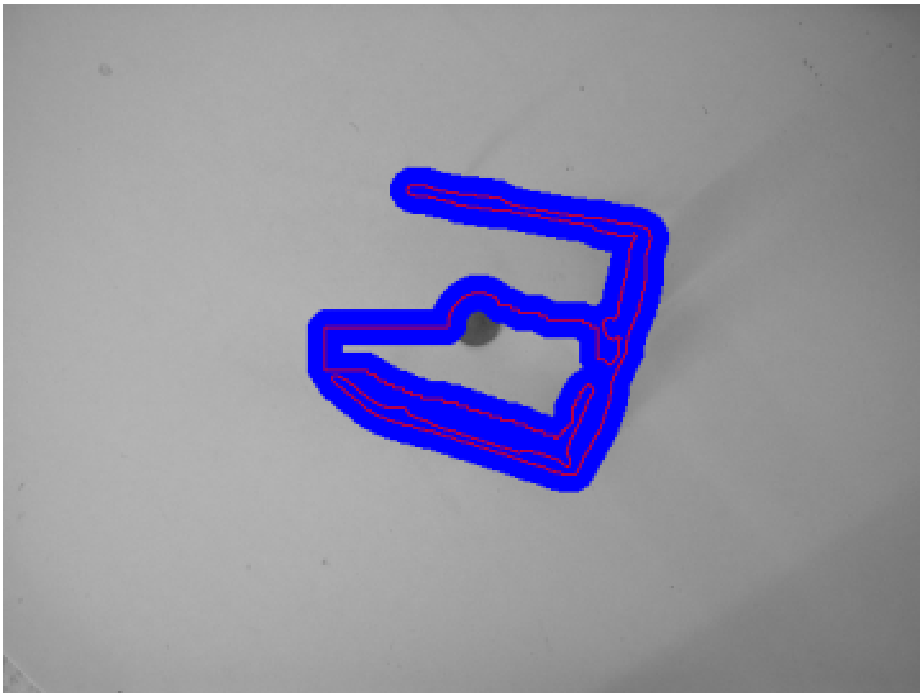
Αυτό το μοντέλο είναι σημαντικό για το πρόβλημά μας αφού η εξίσωση εξέλιξης των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων με την προσθήκη της balloon force (1.11) γράφεται σε αυτή τη μορφή, με $F_0 = cg(x,y)$ (balloon force), $\vec{U}(x,y) = \nabla g$ (γεωδαιτική έλξη προς τις ακμές) και $\epsilon(x,y) = g(x,y)$ (συρρίκνωση της καμπύλης από την καμπυλότητα, με έμφαση σε περιοχές μακριά από ακμές). Η g κατά τα γνωστά προκύπτει από τη σχέση (1.7).

Ο πρώτος όρος της εξίσωσης (2.33) θα προσεγγιστεί με χρήση των σχημάτων που συζητήσαμε στην προηγούμενη υποενότητα. Ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί σε καθαρά μεταφορική κίνηση. Το σχήμα που θα επιλεγεί πρέπει να σέβεται το φυσικό χαρακτήρα της κίνησης: Στη διακριτή προσέγγιση της εξίσωσης με πεπερασμένες διαφορές η πληροφορία θα πρέπει να διαδίδεται στην ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα του φυσικού προβλήματος, αν θέλουμε να έχουμε ευστάθεια. Για αυτόν το λόγο θα προσεγγίσουμε αυτόν τον όρο με upwind σχήμα (δες την υποενότητα 2.1.2). Τέλος για τον τρίτο όρο θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κεντρικές διαφορές. Τούτο οφείλεται στο γεγονός ότι ο τρίτος όρος προκαλεί ομαλοποίηση της καμπύλης, έχει δηλαδή χαρακτήρα (μη-γραμμικής) διάχυσης. Φτάνουμε λοιπόν στο παρακάτω explicit στο χρόνο αριθμητικό σχήμα για την εξίσωση (2.33):

$$\begin{aligned} u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n + \tau\Big\{&[\max(F_{0ij},0)\nabla^+ + \min(F_{0ij},0)\nabla^-] \\ &+[\max(u_{ij}^n,0)D_{ij}^{-x} + \min(u_{ij}^n,0)D_{ij}^{+x} \\ &\quad + \max(v_{ij}^n,0)D_{ij}^{-y} + \min(v_{ij}^n,0)D_{ij}^{+y}] \\ &+[\epsilon(x,y)K_{ij}^n((D_{ij}^{0x})^2 + (D_{ij}^{0y})^2)^{1/2}]\Big\}, \end{aligned} \tag{2.34}$$

όπου $\vec{U} = (u,v)$. Για τον υπολογισμό της καμπυλότητας K_{ij}^n προσεγγίζουμε τις παραγώγους της εξίσωσης (1.14) με κεντρικές διαφορές. Για τους υπόλοιπους όρους χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό με την υποενότητα 2.2.1. Εννοείται βέβαια ότι και τώρα το χρονικό βήμα τ περιορίζεται από μια σχέση ανάλογη της (2.32).

2.3 Επιτάχυνση με τεχνικές στενής ζώνης



Σχήμα 2.2: Εξέλιξη καμπύλης με επιπεδοσύνολα και τεχνικές στενής ζώνης για την εικόνα "Νόμισμα και Γυαλιά". Αντί να ανανεώνουμε την τιμή της συνάρτησης $u(x, y, t)$ σε όλο το επίπεδο της εικόνας σε κάθε επανάληψη, περιορίζουμε τους υπολογισμούς σε μια στενή ζώνη (σκούρο χρώμα) γύρω από την εκάστοτε θέση του μετώπου.

Όπως έχουμε ήδη συζητήσει, η βασική ιδέα της τεχνικής των επιπεδοσυνόλων είναι η εξέλιξη μιας επιφάνειας διάστασης n να δίνεται έμμεσα από την εξέλιξη μιας συνάρτησης $u(\vec{x}, t)$ $n+1$ χωρικών μεταβλητών. Επακόλουθο αυτού όμως είναι ότι η άμεση εφαρμογή των αριθμητικών σχημάτων της ενότητας 2.2 είναι υπολογιστικά ακριβή, αφού, για παράδειγμα, σε κάθε επανάληψη του αριθμητικού σχήματος (2.34) απαιτείται η ανανέωση των τιμών της u που αντιστοιχούν σε όλα τα pixel της εικόνας. Επιπλέον, το μέγιστο επιτρεπτό χρονικό βήμα τ_{max} από τη σχέση (2.32) περιορίζεται από τη μέγιστη τιμή της F_{ij} σε ολόκληρο το επίπεδο της εικόνας.

Η τεχνική *στενής ζώνης (narrowband)*, που πρωτοχρησιμοποιήθηκε από τον Chopp στο [19] και αναλύεται στο [2] αντιμετωπίζει αυτά ακριβώς τα προβλήματα. Η βασική ιδέα, που φαίνεται στο σχήμα 2.2, είναι ότι κατά την εφαρμογή των σχημάτων της ενότητας 2.2 αρκεί να ανανεώνουμε τις τιμές u_{ij} μόνο σε μια στενή ζώνη γύρω από την εκάστοτε θέση του μετώπου. Αυτό είναι εφικτό επειδή το μέτωπο εξελίσσεται με ομαλό τρόπο.

Πιο συγκεκριμένα, έχοντας δεδομένη μια αρχική καμπύλη, αρχικοποιούμε τη στενή ζώνη με το σύνολο των σημείων (εντός και εκτός της καμπύλης) που απέχουν από την καμπύλη λιγότερο από μια απόσταση d. Όταν γίνεται χρήση explicit σχημάτων το d επιλέγεται με τρόπο που η στενή ζώνη να έχει πλάτος ≈ 5 pixels. Στη συνέχεια ανανεώνουμε μόνο τα u_{ij} που αντιστοιχούν σε σημεία (i, j) εντός της στενής ζώνης. Όταν η καμπύλη φτάσει κοντά στα όρια της στενής ζώνης, τότε επαναρχικοποιούμε τη στενή ζώνη και η διαδικασία επαναλαμβάνεται. Λεπτομέρειες για συνοριακές συνθήκες στα όρια της στενής ζώνης, για το πώς μπορούμε να διαπιστώνουμε ότι το μέτωπο πλησιάζει στα όρια της στενής ζώνης κτλ μπορεί να βρει ο αναγνώστης στα [67] και [58]. Το μέγιστο επιτρεπόμενο χρονικό βήμα τ_{max} από τη σχέση (2.32) περιορίζεται τώρα από τη μέγιστη τιμή της F_{ij} στη στενή ζώνη και όχι σε ολόκληρο το επίπεδο της εικόνας.

Η διαδικασία της (επαν)αρχικοποίησης παίζει σπουδαίο ρόλο στον παραπάνω αλγόριθμο. Συνήθως είναι επιθυμητό η συνάρτηση u να (επαν)αρχικοποιείται σε προσημασμένο μετασχηματισμό απόστασης από το μέτωπο, οπότε $\|\nabla u\| = 1$, γιατί αυτό συνεπάγεται πολύ καλές ιδιότητες για τα αριθμητικά μας σχήματα. Για να επιτευχθεί αυτό δύο προσεγγίσεις έχουν επικρατήσει στη βιβλιογραφία:

- Κάθε φορά που απαιτείται (επαν)αρχικοποίηση επιλύουμε ως την τελική κατάσταση την ακόλουθη βοηθητική Hamilton-Jacobi PDE:

$$\begin{cases} d_t + sign(d)(\|\nabla d\| - 1) = 0 \\ d(x, y, 0) = u(x, y, t_0) \end{cases} \tag{2.35}$$

  Βλέπουμε ότι στην τελική κατάσταση $d_t = 0$, οπότε και $\|\nabla d\| = 1$, όπως επιθυμούμε. Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται ιδιαίτερα από την ομάδα του Osher. Μια σύγχρονη αναφορά για τις λεπτομέρειες υλοποίησης της μεθόδου (αριθμητικά σχήματα, κατάλληλη επιλογή για την αριθμητική προσέγγιση της συνάρτησης προσήμου $sign(d)$ κτλ) είναι το [58].

- Η επίλυση της eikonal PDE (1.16) για το ομογενές ισοτροπικό πρόβλημα με $F(x, y) = 1$, που δίνει την εξίσωση $\|\nabla T\| = 1$. Ένας πολύ γρήγορος αλγόριθμος για την επίλυση αυτού του προβλήματος παρουσιάζεται στην ενότητα 2.4.

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας υλοποιήσαμε και τις δύο αυτές μεθόδους. Οι εντυπώσεις μας παρουσιάζονται στην ενότητα 5.4.

Αξίζει τέλος να σημειωθεί ότι η διαδικασία επαναρχικοποίησης είναι θεμελιωμένη θεωρητικά στα [18] και [25]. Εκεί οι συγγραφείς δείχνουν ότι, τουλάχιστον για την ακριβή λύση του προβλήματος, η κίνηση της καμπύλης

$\Gamma(t) = \{(x,y) : u(x,y,t) = 0\}$ δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη επιλογή για την αρχική συνθήκη $u(x,y,0)$, αρκεί το σύνολο $\{(x,y) : u(x,y,0) = 0\}$ να συμπίπτει με το $\Gamma(0)$. Υπό αυτό το πρίσμα η (επαν)αρχικοποίηση δεν είναι παρά η αντικατάσταση της $u(x,y,t)$ από μια άλλη συνάρτηση $\tilde{u}(x,y,t)$ που έχει το ίδιο μηδενικό επιπεδοσύνολο αλλά καλύτερες αριθμητικές ιδιότητες από την u.

2.4 Ο αλγόριθμος ταχείας προέλασης

Στην υποενότητα 1.3.3 είδαμε ότι για την ειδική περίπτωση κίνησης καμπύλης που η συνάρτηση ταχύτητας F διατηρεί πρόσημο (είναι δηλαδή είτε πάντα θετική είτε πάντα αρνητική) και επιπλέον εξαρτάται μόνο από τις χωρικές συντεταγμένες, δηλαδή $F = F(\vec{x})$, τότε το πρόβλημα εξέλιξης της καμπύλης ανάγεται στην επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} \|\nabla T\| F(x,y) = 1 \\ T(x,y) = 0 \text{ για } (x,y) \in \Gamma(0) \end{cases} \tag{2.36}$$

γνωστού στη βιβλιογραφία και με τον όρο eikonal PDE. Για την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης (2.36) μπορούμε να προσεγγίσουμε το $\|\nabla T\|$ με τις εκφράσεις (2.31), που επιλέγουν την κατάλληλη λύση ιξώδους κοντά στα shocks. Για παράδειγμα, όταν $F > 0$ επιλέγουμε το ∇^+ και οδηγούμαστε στο διακριτό σύστημα εξισώσεων:

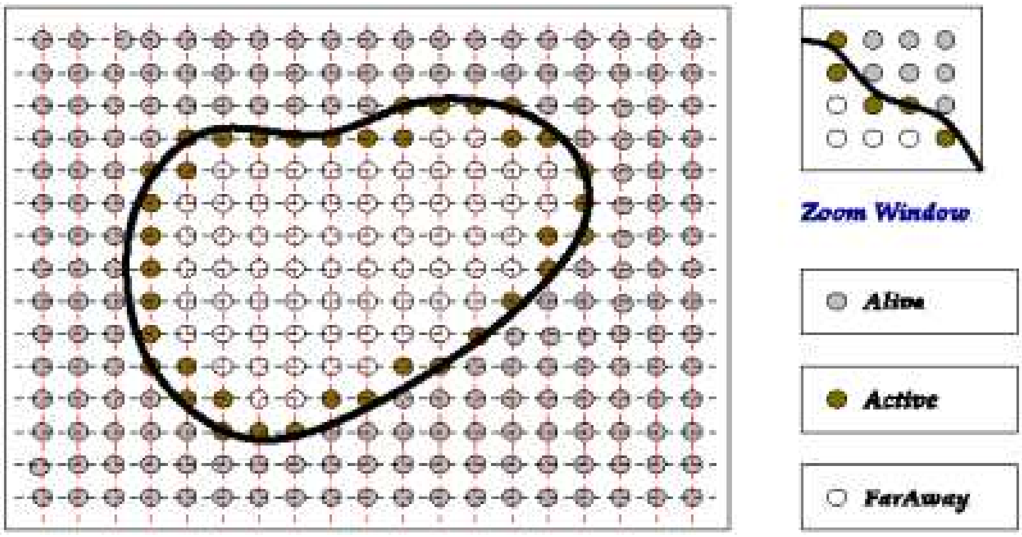
$$\max{}^2[D_{ij}^{-x}T, -D_{ij}^{+x}T, 0] + \max{}^2[D_{ij}^{-y}T, -D_{ij}^{+y}T, 0] = 1/F_{ij}^2 \tag{2.37}$$

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του T_{ij} αν ξέρουμε τις τιμές της T στα τέσσερα γειτονικά pixels (n,w,e,s), λύνοντας μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς το T_{ij}.

Για να λύσουμε αυτές τις εξισώσεις ταυτόχρονα μία δυνατότητα θα ήταν να ξεκινήσουμε με μία αρχική προσέγγιση της λύσης και να τη βελτιώσουμε σταδιακά, εφαρμόζοντας επαναληπτικά τις εξισώσεις (2.37) [62]. Αυτό όμως είναι υπολογιστικά ακριβό γιατί απαιτούνται πολλές σαρώσεις του χωρίου μέχρι η διαδικασία χαλάρωσης να συγκλίνει στη λύση.

Ο δεύτερος τρόπος προσέγγισης του προβλήματος είναι η μέθοδος *ταχείας προέλασης (fast marching)*, που προτάθηκε από τον Sethian το 1996 [66][2]. Η μέθοδος βασίζεται στην παρατήρηση ότι η πληροφορία εντός της εξίσωσης (2.37) διαδίδεται μόνο σε μία κατεύθυνση, από μικρές τιμές του T σε μεγαλύτερες. Αυτό μπορούμε να το εκμεταλλευτούμε προκειμένου να σαρώσουμε τα pixels με συστηματικό τρόπο, αρχίζοντας από αυτά που είναι κοντά στην αρχική καμπύλη και απομακρυνόμενοι σταδιακά, κατασκευάζοντας έτσι τα σωστά T_{ij} σε όλο το χώρο.

[2] Μια ισοδύναμη μορφή του αλγορίθμου είχε προταθεί το 1995 στο [72]



Σχήμα 2.3: Ο αλγόριθμος ταχείας προέλασης για την eikonal PDE. Καθώς το μέτωπο εξελίσσεται με κατεύθυνση προς τα μέσα, νέα pixels ενημερώνονται για τη (γκρίζα) απόστασή τους από την αρχική καμπύλη. Τα *Active* pixels βρίσκονται σε ουρά προτεραιότητας και περιμένουν τη σειρά τους για να περάσει από πάνω τους η καμπύλη. Από το [56].

Πιο συγκεκριμένα και με αναφορά το σχήμα 2.3, τα pixels χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:

1. *Alive*: Αυτά για τα οποία γνωρίζουμε ήδη την οριστική τιμή για το T.

2. *Active*: Αυτά τα οποία γειτονεύουν με pixels της πρώτης κατηγορίας, έχουν μια προσωρινή τιμή για το T και είναι υποψήφια να προσεγγιστούν από το μέτωπο στην επόμενη επανάληψη.

3. *Far Away*: Αυτά που δεν ανήκουν ακόμα σε καμία από τις δύο προηγούμενες κατηγορίες και θεωρούμε ότι απέχουν ∞ από την αρχική καμπύλη – μέχρι νεωτέρας τουλάχιστον.

Ο αλγόριθμος χωρίζεται σε δύο φάσεις:

1. *Αρχικοποίηση*: Τα pixels που γειτονεύουν με το μέτωπο αρχικοποιούνται με την απόστασή τους από το $\Gamma(0)$ και εντάσσονται στην κατηγορία *Alive*. Τα άμεσα γειτονικά τους pixels παίρνουν προσωρινές τιμές με βάση την εξίσωση (2.37) και μπαίνουν στην κατηγορία *Active*. Τα υπόλοιπα pixels μπαίνουν στην κατηγορία *Far Away*.

2. *Προέλαση*: Το pixel p_0 της κατηγορίας *Active* που έχει την μικρότερη προσωρινή τιμή T βγαίνει από την κατηγορία *Active* και εντάσσεται στην κατηγορία *Alive*. Τα γειτονικά του pixels, αν ανήκουν στην κατηγορία *Far Away* παίρνουν προσωρινές τιμές με βάση την εξίσωση (2.37) και μπαίνουν στην κατηγορία *Active*. Αν ήδη ανήκουν στην κατηγορία *Active* εξετάζουμε αν υπάρχει δυνατότητα επίτευξης τιμής T μικρότερης από την υπάρχουσα και, εάν αυτό είναι δυνατό, θέτουμε ως νέα τιμή για το T τη μικρότερη.

Ο αλγόριθμος σταματάει όταν όλα τα pixels ενταχθούν στην κατηγορία *Alive*.

Κλειδί για την ταχεία υλοποίηση του αλγορίθμου είναι η χρήση μιας δομής δεδομένων που να επιτρέπει τη γρήγορη εξαγωγή του ελάχιστου στοιχείου ενός συνόλου. Μια τέτοια αφηρημένη δομή δεδομένων είναι η ουρά προτεραιότητας που υλοποιείται γρήγορα με τη χρήση *σωρού (heap)* [20]. Ο σωρός N στοιχείων υποστηρίζει εξαγωγή του μικρότερου στοιχείου από σύνολο σε χρόνο $O(1)$ και προσθήκη στοιχείου με αποκατάσταση της ιδιότητας σωρού σε χρόνο $O(\log N)$. Έτσι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου ταχείας προέλασης προκύπτει να είναι $O(P \log P)$ στη χειρότερη περίπτωση, όπου P είναι ο αριθμός των pixels της εικόνας.

Πρέπει, τέλος, να σημειώσουμε ότι κατά την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης (2.36) δεν έχουμε κάποιο περιορισμό ανάλογο της σχέσης (2.32) προκειμένου να πετύχουμε ευστάθεια. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι πρόκειται για στάσιμο πρόβλημα καθαρά συνοριακών τιμών, στο οποίο δεν έχουμε καμία χρονική εξέλιξη.

Κεφάλαιο 3

Αριθμητικές Μέθοδοι για την Επίλυση Αραιών Αλγεβρικών Συστημάτων

Η επίλυση αραιών γραμμικών αλγεβρικών συστημάτων της μορφής

$$Ax = b, \tag{3.1}$$

όπου $A = \{a_{ij}\}$ ένας $N \times N$ πίνακας, είναι συχνά ένα απαραίτητο βήμα κατά τη διαδικασία επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων με αριθμητικές μεθόδους. Για παράδειγμα, η επίλυση της εξίσωσης Poisson με πεπερασμένες διαφορές ή πεπερασμένα στοιχεία συνήθως ανάγεται στην επίλυση ενός πολύ μεγάλου συστήματος εξισώσεων με λίγα όμως μη-μηδενικά στοιχεία. Στην παρούσα εργασία η επίλυση γραμμικών συστημάτων διαστάσεων $N \times N$, όπου $N \sim 10^5$ είναι ο αριθμός των pixels της εικόνας που επεξεργαζόμαστε, είναι απαραίτητη κατά τη διακριτοποίηση των μοντέλων του Κεφαλαίου 1 με implicit σχήματα πεπερασμένων διαφορών, όπως θα δούμε με λεπτομέρεια στα Κεφάλαια 4 και 5. Αντικείμενο του παρόντος Κεφαλαίου είναι να εισαγάγει τον αναγνώστη σε τεχνικές που επιτρέπουν τη γρήγορη επίλυση αραιών γραμμικών συστημάτων και θα χρησιμοποιηθούν στους ταχείς αλγορίθμους των επόμενων Κεφαλαίων.

3.1 Απευθείας μέθοδοι

Με τον όρο *απευθείας μέθοδοι (direct methods)* για την επίλυση του συστήματος (3.1) χαρακτηρίζουμε αριθμητικούς αλγορίθμους που φτάνουν στην ακριβή λύση του συστήματος (σε υπολογιστή με άπειρο μήκος λέξης) ύστερα από πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Η χρήση απευθείας μεθόδων που είναι σχεδιασμένες για την επίλυση πυκνών γραμμικών συστημάτων στην περίπτωση αραιών πινάκων είναι, δυστυχώς, μη αποδοτική. Για παράδειγμα, η μέθοδος απαλοιφής του Gauss, που έχει πολυπλοκότητα $O(N^3)$ πολλαπλασιασμούς/διαιρέσεις και απαιτεί αποθηκευτικό χώρο N^2 θέσεων μνήμης, δε θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση των προβλημάτων που μας ενδιαφέρουν.

Παρόλα αυτά υπάρχουν κλάσεις προβλημάτων, που χαρακτηρίζονται από ειδικές μορφές του πίνακα A, για τις οποίες έχουν ανακαλυφθεί πολύ γρήγοροι απευθείας αλγόριθμοι. Μια τέτοια περίπτωση είναι τα *τριδιαγώνια* συστήματα, που έχουν τη μορφή:

$$\begin{pmatrix} b_1 & -c_1 & & & 0 \\ -a_2 & b_2 & -c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -a_{N-1} & b_{N-1} & -c_{N-1} \\ 0 & & & -a_N & b_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Αυτά τα συστήματα εμφανίζονται κατά τη διακριτοποίηση μονοδιάστατων PDEs. Για τα τριδιαγώνια συστήματα υπάρχει μια απλοποιημένη μορφή της απαλοιφής Gauss, γνωστή και ως *αλγόριθμος του Thomas* που μπορεί να χρησιμοποιηθεί αποδοτικά [24].

Πιο συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι σε κάθε γραμμή του πίνακα A υπάρχει μόνο ένα μη-μηδενικό στοιχείο κάτω από την κύρια διαγώνιο που πρέπει να απαλειφθεί. Έστω l_i, m_i οι ποσότητες που αντικαθιστούν τα b_i, d_i, αντίστοιχα, κατά τη διαδικασία της απαλοιφής. Ο αλγόριθμος τότε προχωράει σε δύο βήματα:

(i) *Απαλοιφή*

$$\begin{aligned} l_1 &= b_1 & m_1 &= d_1 \\ l_i &= b_i - \frac{c_{i-1}a_i}{l_{i-1}} & m_i &= d_i + \frac{m_{i-1}a_i}{l_{i-1}} \quad i = 2, \ldots, N \end{aligned}$$

(ii) *Όπισθεν αντικατάσταση*

$$x_N = \frac{m_N}{l_N} \qquad x_i = \frac{m_i + c_i x_{i+1}}{l_i} \quad i = N-1, \ldots, 1$$

Μπορεί να αποδειχτεί ότι ο αλγόριθμος του Thomas είναι ευσταθής για πίνακες με αυστηρή διαγώνια υπεροχή: $|b_i| > |a_i| + |c_i|, \forall i = 1, \ldots, N$. Το κόστος του παραπάνω αλγορίθμου από πλευράς υπολογισμών είναι $5N$ πολλαπλασιασμοί/διαιρέσεις και από πλευράς αποθηκευτικού χώρου $O(N)$ θέσεις μνήμης.

Πρόκειται δηλαδή για αλγόριθμο γραμμικής πολυπλοκότητας, κάτι που είναι πολύ θετικό χαρακτηριστικό του αλγορίθμου.

Πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι οι απευθείας μέθοδοι για την επίλυση αραιών αλγεβρικών συστημάτων δεν περιορίζονται σε καμιά περίπτωση στον αλγόριθμο του Thomas και τα τριδιαγώνια συστήματα. Μια πολύ καλή αναφορά για αυτά τα θέματα είναι το [23].

3.2 Επαναληπτικές μέθοδοι

Η χρήση *επαναληπτικών μεθόδων (iterative methods)* είναι πολύ συνηθισμένη στην επίλυση μεγάλων και αραιών αλγεβρικών συστημάτων που προκύπτουν κατά τη διακριτοποίηση PDEs. Οι επαναληπτικές μέθοδοι, σε αντίθεση με τη μέθοδο απαλοιφής, έχουν το πλεονέκτημα ότι διατηρούν την αραιή δομή του πίνακα συντελεστών κατά τη διαδικασία εφαρμογής τους. Από την άλλη πλευρά, όμως, η σύγκλισή τους δεν είναι πάντα εξασφαλισμένη και εξαρτάται από το συγκεκριμένο πίνακα συντελεστών A της εξίσωσης (3.1).

Πιο συγκεκριμένα, ας διαμερίσουμε τον πίνακα A σε τρεις πίνακες L, D και U που είναι το κάτω τριγωνικό τμήμα, η διαγώνιος και το άνω τριγωνικό τμήμα του πίνακα A, αντίστοιχα. Τότε

$$A = L + D + U \tag{3.3}$$

και το σύστημα (3.1) γράφεται

$$(L + D + U)x = b \tag{3.4}$$

Η τελευταία εξίσωση γράφεται και στη μορφή

$$Dx = -(L + U)x + b \tag{3.5}$$

Αν υποθέσουμε ότι τα διαγώνια στοιχεία του A είναι όλα μη-μηδενικά, τότε ο D είναι αντιστρέψιμος και οδηγούμαστε στην επαναληπτική διαδικασία

$$x^{n+1} = -D^{-1}(L + U)x^n + D^{-1}b \tag{3.6}$$

για κάποιο αρχικό διάνυσμα x^0. Αυτή είναι η επαναληπτική μέθοδος του *Jacobi*. Αναπτύσσοντας την εξίσωση πινάκων (3.6) η μέθοδος γράφεται και στη μορφή (για πίνακα 3×3 και $x = (x_1, x_2, x_3)^T$)

$$\begin{aligned} x_1^{n+1} &= (b1 - a_{12}x_2^n - a_{13}x_3^n)/a_{11} \\ x_2^{n+1} &= (b2 - a_{21}x_1^n - a_{23}x_3^n)/a_{22} \\ x_3^{n+1} &= (b3 - a_{31}x_1^n - a_{32}x_2^n)/a_{33} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Μια διαφορετική μέθοδος προκύπτει όταν γράψουμε την εξίσωση (3.4) στη μορφή

$$(L + D)x = -Ux + b \tag{3.8}$$

που οδηγεί στη μέθοδο *Gauss-Seidel*:

$$x^{n+1} = -(L + D)^{-1}Ux^n + (L + D)^{-1}b \tag{3.9}$$

Για να υπάρχει ο $(L + D)^{-1}$ αρκεί πάλι τα διαγώνια στοιχεία του A είναι όλα μη-μηδενικά. Σημειωτέον ότι η μέθοδος μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$x^{n+1} = x^n + D^{-1}(b - Lx^{n+1} - Ux^n - Dx^n) \tag{3.10}$$

που οδηγεί στην υλοποίηση (για πίνακα 3×3)

$$\begin{aligned} x_1^{n+1} &= (b1 - a_{12}x_2^n - a_{13}x_3^n)/a_{11} \\ x_2^{n+1} &= (b2 - a_{21}x_1^{n+1} - a_{23}x_3^n)/a_{22} \\ x_3^{n+1} &= (b3 - a_{31}x_1^{n+1} - a_{32}x_2^{n+1})/a_{33} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (3.7) και (3.11) παρατηρούμε ότι στην επαναληπτική διαδικασία Gauss-Seidel χρησιμοποιούμε τις πιο πρόσφατες διαθέσιμες τιμές για τους αγνώστους $\{x_i\}$ στο δεξί μέλος της (3.11), ενώ στη μέθοδο Jacobi χρησιμοποιούμε τις τιμές από την προηγούμενη επανάληψη.

Μια παραλλαγή της μεθόδου Jacobi προκύπτει αν πάρουμε για x^{n+1} το σταθμισμένο άθροισμα της τιμής που προκύπτει από τη μέθοδο Jacobi (με βάρος ω) και της τιμής x^n από την προηγούμενη επανάληψη (με βάρος $1 - \omega$). Η προκύπτουσα μέθοδος ονομάζεται *σταθμισμένη μέθοδος Jacobi* και περιγράφεται από την εξίσωση:

$$x^{n+1} = [(1 - \omega)I - \omega D^{-1}(L + U)]x^n + \omega D^{-1}b \tag{3.12}$$

Προκειμένου να αναλύσουμε τη σύγκλιση αυτών των μεθόδων, παρατηρούμε ότι όλες γράφονται στη μορφή:

$$x^{n+1} = Gx^n + d \tag{3.13}$$

με

$$G^J = -D^{-1}(L + U) = I - D^{-1}A \tag{3.14α΄}$$
$$G^{GS} = -(L + D)^{-1}U \tag{3.14β΄}$$
$$G^{WJ} = (1 - \omega)I - \omega D^{-1}(L + U) = I - \omega D^{-1}A \tag{3.14γ΄}$$

για τις τρεις μεθόδους που εξετάσαμε ως τώρα. Αυτή η μορφή ονομάζεται *γενική επαναληπτική μέθοδος*.

Η ακριβής λύση x^* του συστήματος που προσπαθούμε να λύσουμε είναι σταθερό σημείο της (3.13), δηλαδή $x^* = Gx^* + d$. Αφαιρώντας την τελευταία σχέση από την (3.13) προκύπτει ότι το σφάλμα $e^n = x^* - x^n$ εξελίσσεται σύμφωνα με την εξίσωση

$$e^{n+1} = Ge^n = G^{n+1}e^0 \tag{3.15}$$

Έχουμε ξαναδεί παρόμοια εξέλιξη στην υποενότητα 2.1.4, όταν μελετούσαμε την ευστάθεια αριθμητικών μεθόδων με τη μέθοδο του πίνακα. Από το Θεώρημα 2.2 προκύπτει άμεσα το ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 3.1. *Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να συγκλίνει η μέθοδος 3.13 για κάθε αρχικό διάνυσμα εκτίμησης x^0 είναι η φασματική ακτίνα $\rho(G) < 1$.*

Έτσι μπορούμε, για παράδειγμα, να αποδείξουμε ότι η αυστηρή διαγώνια υπεροχή του πίνακα A οδηγεί σε σύγκλιση της μεθόδου Jacobi επειδή οδηγεί σε πίνακα G_J με $\rho(G_J) < 1$ (για την απόδειξη δες π.χ. το [30]).

Βέβαια πέρα από τη σύγκλιση ή μη-σύγκλιση μιας επαναληπτικής μεθόδου πολύ σημαντική είναι και η ταχύτητα σύγκλισης, δηλαδή πόσο γρήγορα θα μας δώσει μια λύση που μπορεί να θεωρηθεί ως ικανοποιητική προσέγγιση της ακριβούς λύσης για το πρόβλημα που μας ενδιαφέρει.

Για να απλοποιήσουμε την ανάλυση θεωρούμε ότι ο πίνακας G έχει N γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $v_1, \ldots, v_N$ (αυτό ισχύει π.χ. όταν ο G είναι συμμετρικός, όπως συμβαίνει συχνά στην πράξη), που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_s, αριθμημένες κατά φθίνουσα απόλυτη τιμή (βλέπε εξίσωση (2.17)). Τα $\{v_s\}$ αποτελούν μια βάση στο $\mathbb{R}^N$. Εκφράζοντας το αρχικό σφάλμα e^0 σε αυτή τη βάση παίρνουμε

$$e^0 = \sum_{s=1}^{N} \gamma_s v_s \tag{3.16}$$

Έτσι προκύπτει για το σφάλμα e^n η σχέση:

$$\begin{aligned}
e^n &= G^n e^0 = G^n \sum_{s=1}^{N} \gamma_s v_s \\
&= \sum_{s=1}^{N} \gamma_s G^n v_s = \sum_{s=1}^{N} \gamma_s \lambda_s^n v_s \\
&= \lambda_1^n [\gamma_1 v_1 + \sum_{s=2}^{N} \gamma_s (\frac{\lambda_s}{\lambda_1})^n v_s] \\
&= \rho^n [\gamma_1 v_1 + \sum_{s=2}^{N} \gamma_s (\frac{\lambda_s}{\rho})^n v_s],
\end{aligned} \tag{3.17}$$

όπου $\rho \equiv \rho(G) = \lambda_1$ είναι η φασματική ακτίνα του πίνακα G.

Παρατηρούμε ότι οι συνιστώσες του σφάλματος που αντιστοιχούν σε διαφορετικά ιδιοδιανύσματα αποσβένονται με διαφορετικούς ρυθμούς, που ταυτίζονται με τις αντίστοιχες ιδιοτιμές λ_s. Για μεγάλο n το άθροισμα στον τελευταίο τύπο τείνει στο μηδέν και στο σφάλμα κυριαρχεί η συνιστώσα που αντιστοιχεί στο v_1. Ασυμπτωτικά έχουμε λοιπόν:

$$e^n \approx \rho^n \gamma_1 v_1 \tag{3.18}$$

Από τον τύπο (3.18) προκύπτει ότι, προκειμένου να βελτιωθεί η προσέγγιση της λύσης κατά μία τάξη μεγέθους (δηλαδή το σφάλμα να γίνει δέκα φορές μικρότερο) μετά την επικράτηση της συνιστώσας που αντιστοιχεί στο v_1, απαιτούνται $-\log_{10}\rho$ επαναλήψεις. Αυτό το μέγεθος ονομάζεται *ρυθμός σύγκλισης (convergence rate)* της μεθόδου και μετριέται σε (ψηφία ακρίβειας/επανάληψη). Βλέπουμε λοιπόν ότι η ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου, τουλάχιστον μετά από κάποια μεταβατική περίοδο, εξαρτάται από τη φασματική ακτίνα του πίνακα G.

3.3 Η μέθοδος πολλαπλών πλεγμάτων

Η *μέθοδος πολλαπλών πλεγμάτων (multigrid method)* είναι ίσως η πιο γενική ταχεία μέθοδος για την επίλυση αραιών αλγεβρικών συστημάτων. Σε αντίθεση με άλλες τεχνικές, η μέθοδος πολλαπλών πλεγμάτων δίνει τη δυνατότητα επίλυσης αραιών γραμμικών συστημάτων με N αγνώστους με γραμμικό κόστος $O(N)$, και αυτό όχι μόνο σε ειδικές περιπτώσεις, αλλά για μία ευρεία γκάμα προβλημάτων. Εννοιολογικά έχει μεγάλη συγγένεια με την ανάλυση εικόνων σε πολλαπλές κλίμακες, αφού και οι δύο μέθοδοι προκειμένου να επιλύσουν ένα πρόβλημα μεγάλης διάστασης το διασπούν πρώτα σε μια πυραμίδα προβλημάτων μικρότερης διάστασης.

Για να δείξουμε την αρχή λειτουργίας της multigrid μεθοδολογίας θα αναλύσουμε την εφαρμογή της στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος που προκύπτει κατά τη διακριτοποίηση του παρακάτω προβλήματος αρχικών/συνοριακών τιμών με implicit σχήματα:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.19}$$

με $u = 0$ για $x = 0$ και για $x = 1$. Παρόμοιο πρόβλημα είχαμε διερευνήσει στην υποενότητα 2.1.4 για να επιδείξουμε τη χρήση μεθόδων ανάλυσης ευστάθειας. Η μόνη διαφορά με εκείνη την περίπτωση (σελ. 43) είναι ότι εδώ έχουμε διαφορετικές συνοριακές συνθήκες. Αυτό το κάνουμε απλά και μόνο επειδή η επιλογή των συγκεκριμένων συνοριακών συνθηκών θα μας διευκολύνει στην ανάλυση που ακολουθεί.

Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο implicit σχήμα πεπερασμένων διαφορών για την (3.19):

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \tau(u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}) \text{ για } i = 1, \ldots, N-1 \tag{3.20}$$

Η συνοριακή συνθήκη δίνει επιπλέον $u_0^n = u_N^n = 0$. Έχουμε επίσης θέσει $h = 1$, οπότε $r = \tau/h^2 = \tau$. Συγκρίνοντας την τελευταία εξίσωση με την (2.20) βλέπουμε ότι για την προσέγγιση της χωρικής παραγώγου χρησιμοποιούμε τώρα τις τιμές του u κατά τη χρονική στιγμή $n+1$. Το όφελος αυτής της αλλαγής είναι ευστάθεια δίχως περιορισμούς στο χρονικό βήμα. Το κόστος είναι ότι θα απαιτηθεί η λύση γραμμικού συστήματος σε κάθε επανάληψη.

Αυτό το σχήμα μπορεί να γραφεί πιο συνεπτυγμένα στη μορφή

$$u^{n+1} = u^n + \tau S u^{n+1} \tag{3.21}$$

ή, ισοδύναμα:

$$(\frac{1}{\tau} I - S) u^{n+1} = \frac{1}{\tau} u^n, \tag{3.22}$$

Προκύπτει δηλαδή γραμμικό σύστημα με πίνακα συντελεστών αγνώστων $A = \frac{1}{\tau} I - S$, όπου S είναι ο παρακάτω τριδιαγώνιος $(N-1) \times (N-1)$ πίνακας:

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα S υπολογίζονται με τρόπο ανάλογο με αυτόν που χρησιμοποιήσαμε στην υποενότητα 2.1.4. Προκύπτουν οι ιδιοτιμές:

$$\lambda_s = -4 \sin^2(\frac{s\pi}{2N}) \text{ για } s = 1, \ldots, N-1 \tag{3.24}$$

Στο λ_s αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα v_s με συνιστώσες:

$$(v_i)_s = \sin(\frac{is\pi}{N}) \text{ για } i = 1, \ldots, N-1 \tag{3.25}$$

Από το Λήμμα (2.4), οι ιδιοτιμές l_s του πίνακα $A = \frac{1}{\tau} I - S$ συνδέονται με τις ιδιοτιμές λ_s του πίνακα S με τη σχέση $l_s = 1/\tau - \lambda_s$, ενώ τα ιδιοδιανύσματα είναι τα ίδια. Συνεπώς έχουμε

$$l_s = \frac{1}{\tau} + 4 \sin^2(\frac{s\pi}{2N}) \text{ για } s = 1, \ldots, N-1 \tag{3.26}$$

Είμαστε τώρα έτοιμοι να προχωρήσουμε στην ανάλυσή μας. Θα δούμε καταρχήν γιατί οι επαναληπτικές μέθοδοι της προηγούμενης ενότητας παρουσιάζουν αργή σύγκλιση και είναι ανεπαρκείς. Στη συνέχεια θα δούμε πώς η μέθοδος των πολλαπλών πλεγμάτων καταφέρνει να επιταχύνει τη σύγκλιση προς την ορθή λύση.

Από τις επαναληπτικές μεθόδους της προηγούμενης ενότητας θα αναλύσουμε τη σταθμισμένη μέθοδο Jacobi, όταν αυτή εφαρμοστεί στο πρόβλημα που εξετάζουμε. Επειδή όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του πίνακα A είναι ίσα με $2 + 1/\tau$, έχουμε $D = (2 + 1/\tau)I$. Άρα (δες και εξίσωση (3.14γ′)) προκύπτει ότι ο πίνακας της σταθμισμένης μεθόδου Jacobi είναι ο:

$$G^{WJ} = I - \omega D^{-1}A = I - \frac{\omega}{2 + 1/\tau}A \tag{3.27}$$

Από το Λήμμα (2.4) οι ιδιοτιμές του πίνακα G^{WJ} είναι οι:

$$\lambda_s^{WJ} = 1 - \frac{\omega}{2 + 1/\tau}l_s \tag{3.28}$$

$$\overset{(3.26)}{=} 1 - \frac{\omega}{2 + 1/\tau}(\frac{1}{\tau} + 4\sin^2(\frac{s\pi}{2N})) \tag{3.29}$$

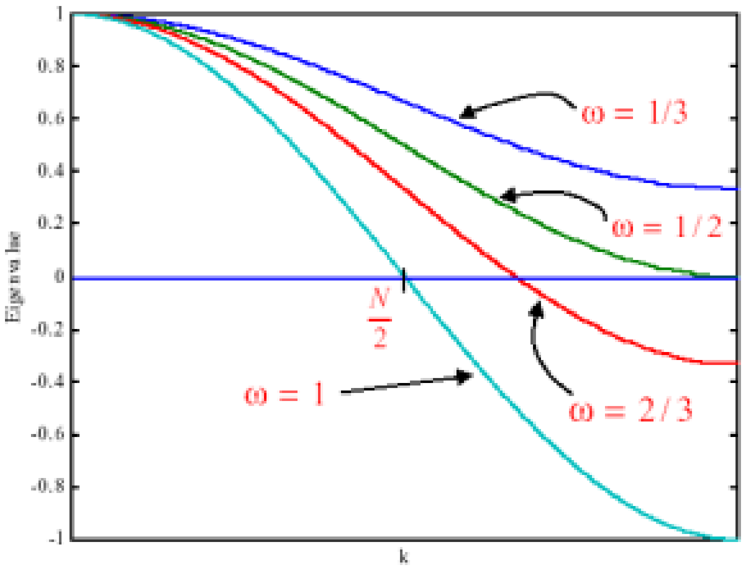
$$= (1 - \frac{\omega}{1 + 2\tau}) - \frac{4\omega}{2 + 1/\tau}\sin^2(\frac{s\pi}{2N}) \text{ για } s = 1, \ldots, N-1, \tag{3.30}$$

ενώ τα ιδιοδιανύσματα v_s δίνονται από την (3.25). Για μεγάλο χρονικό βήμα $\tau \gtrsim 10^3$ που μας ενδιαφέρει στην περίπτωσή μας, ισχύει η προσεγγιστική σχέση:

$$\lambda_s^{WJ} \approx 1 - 2\omega\sin^2(\frac{s\pi}{2N}) \text{ για } s = 1, \ldots, N-1, \tag{3.31}$$

Αυτή η σχέση έχει απεικονιστεί στο σχήμα 3.1 για διάφορες τιμές της παραμέτρου ω. Παρατηρούμε ότι για $0 \leq \omega \leq 1$ η επαναληπτική μέθοδος συγκλίνει, αφού $\rho = \max_s|\lambda_s^{WJ}| < 1$. Όμως τα νέα για την ταχύτητα σύγκλισης δεν είναι ενθαρρυντικά. Από τη μια πλευρά για $s \geq N/2$ (που αντιστοιχεί στις συνιστώσες του σφάλματος με υψηλή χωρική συχνότητα–βλ.σχέση (3.25)) μπορούμε, επιλέγοντας $\omega = 2/3$ να πετύχουμε $\max_{s \geq N/2}|\lambda_s^{WJ}| < 1/3$ που σημαίνει καλό ρυθμό απόσβεσης για το υψίσυχνο σφάλμα. Από την άλλη πλευρά, όμως, για μικρό s (που αντιστοιχεί στις χαμηλόσυχνες συνιστώσες του σφάλματος) έχουμε ιδιοτιμές πολύ κοντά στη μονάδα, για οποιαδήποτε επιλογή της παραμέτρου ω. Πιο συγκεκριμένα, και για $\omega = 2/3$ προκύπτει $\lambda_s^{WJ} \approx 1 - \frac{\pi^2 s^2}{3N^2}$. Αυτή η τιμή για τις χαμηλόσυχνες ιδιοτιμές οδηγεί σε ρυθμούς σύγκλισης

$$-\log_{10}|\lambda_s^{WJ}| = -\log_{10}(1 - \frac{\pi^2 s^2}{3N^2}) \approx 1.43\frac{s^2}{N^2} \qquad \text{(ψηφία/επανάληψη)} \tag{3.32}$$

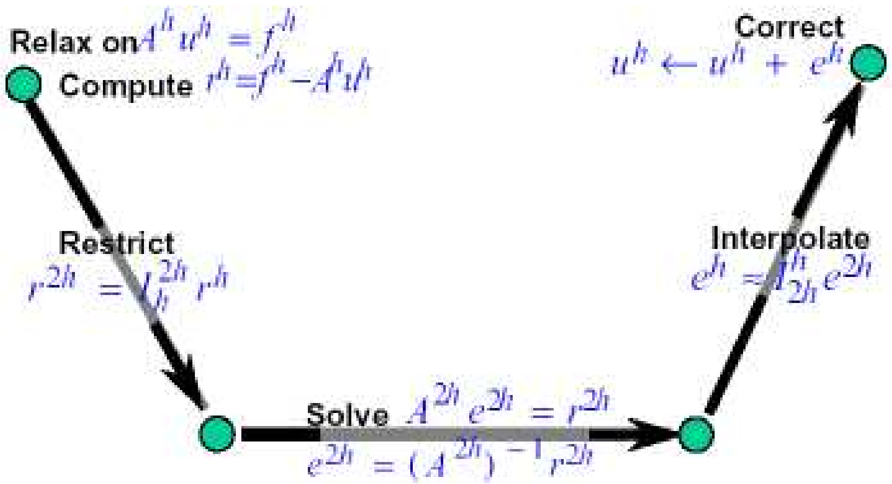


Σχήμα 3.1: Στο σχήμα απεικονίζονται οι ιδιοτιμές λ_s^{WJ} της της σταθμισμένης μεθόδου Jacobi σε συνάρτηση με το $s = 1, \ldots, N$ για το πρόβλημα που αναλύουμε και για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου ω. Η απόσβεση των διαφορετικών συνιστωσών του σφάλματος γίνεται με διαφορετικούς ρυθμούς για κάθε συνιστώσα. Το υψίσυχνο σφάλμα (δεξί μισό της παράστασης) αποσβένεται πολύ ταχύτερα από το χαμηλόσυχνο (αριστερό μισό της παράστασης). Από το [11].

Για $N = 100$ και $s = 1$ προκύπτει ότι απαιτούνται περίπου 7000 επαναλήψεις για να βελτιώσουμε την προσέγγιση της λύσης κατά ένα δεκαδικό ψηφίο. Αυτοί οι ρυθμοί σύγκλισης δεν είναι αποδεκτοί, γιατί απαιτούνται πάρα πολλές επαναλήψεις (που μάλιστα αυξάνονται με το τετράγωνο του μεγέθους του προβλήματος N) για τη συμπίεση των χαμηλόσυχνων συνιστωσών του σφάλματος κάτω από μια προκαθορισμένη στάθμη.

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης που κάναμε ως εδώ δεν περιορίζονται στη σταθμισμένη μέθοδο Jacobi και στο συγκεκριμένο πρόβλημα που προσπαθούμε να λύσουμε. Πολλές επαναληπτικές μέθοδοι έχουν την *ιδιότητα ομαλοποίησης (smoothing property)*, δηλαδή εξαλείφουν πολύ γρήγορα το σφάλμα υψηλής συχνότητας, έχοντας *συντελεστή ομαλοποίησης (smoothing factor)* $\max_{s \geq N/2} |\lambda_s^{WJ}|$ σημαντικά μικρότερο του 1, ενώ, την ίδια στιγμή, αδυνατούν να αποσβέσουν ικανοποιητικά το χαμηλόσυχνο σφάλμα, έχοντας $\max_{s < N/2} |\lambda_s^{WJ}| \approx 1$.

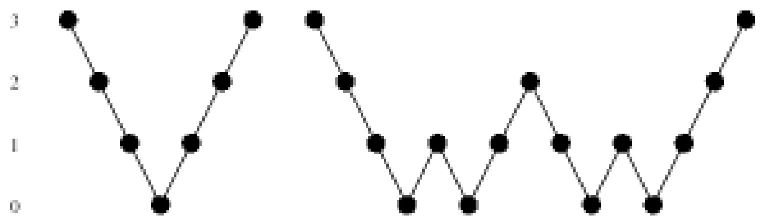
Η μέθοδος πολλαπλών πλεγμάτων προσπαθεί να εκμεταλλευτεί την ιδιότητα ομαλοποίησης των επαναληπτικών μεθόδων και να υπερβεί την αδυναμία τους να μειώσουν αποδοτικά το χαμηλόσυχνο σφάλμα. Έτσι, καταρχήν εκτελούμε κάποιες επαναλήψεις μιας επαναληπτικής μεθόδου στο πιο λεπτομερές επίπεδο Ω^h, προκειμένου να εξαλείψουμε τις υψίσυχνες συνιστώσες του σφάλματος. Στη συνέχεια μεταφέρουμε τη λύση σε ένα λιγότερο λεπτομερές επίπεδο Ω^{2h}. Στο νέο χώρο ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων το σφάλμα έχει τώρα πιο υψίσυχνο χαρακτήρα. Εκτελούμε και εκεί μερικές επαναλήψεις μιας επαναληπτικής μεθόδου, που ομαλοποιεί εκ νέου το σφάλμα. Συνεχίζουμε κατ΄ αυτόν τον τρόπο αναδρομικά ωσότου φτάσουμε στον πιο τραχύ χώρο μικρής διάστασης, όπου και λύνουμε την εξίσωση με κάποια απευθείας μέθοδο. Στη συνέχεια διαδίδουμε την προκύπτουσα λύση ξανά προς τα πιο λεπτομερή επίπεδα, διορθώνοντας πάλι σε κάθε επίπεδο τη λύση με μια επαναληπτική μέθοδο. Η διαδικασία αυτή στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε μόνο δύο επίπεδα φαίνεται στο σχήμα 3.2. Στη γενικότερη περίπτωση πολλών επιπέδων έχουμε δύο επιλογές, που αντιστοιχούν η μία στην εκδοχή του V– και η άλλη στην εκδοχή του W–κύκλου, που απεικονίζονται στο σχήμα 3.3.



Σχήμα 3.2: Η βασική ιδέα της μεθόδου πολλαπλών πλεγμάτων. Αφού έχουμε ομαλοποιήσει το σφάλμα στο πιο λεπτομερές επίπεδο Ω^h, το προβάλλουμε στο πιο τραχύ επίπεδο Ω^{2h}, όπου η ομαλοποίηση των χαμηλόσυχνων συνιστωσών είναι πιο εύκολη και στη συνέχεια διαδίδουμε τη διόρθωση πίσω στο επίπεδο Ω^h. Από το [11].

Κοιτάζοντας πιο προσεκτικά το σχήμα 3.2 είναι σαφές ότι πρέπει να καθορίσουμε τον κανόνα μεταφοράς διανυσμάτων μεταξύ δύο διαδοχικών επιπέδων με τους πίνακες *περιορισμού (restriction)* I_h^{2h} και *επέκτασης (prolongation)* I_{2h}^h, καθώς και τον τρόπο που πρέπει να οριστούν οι πίνακες $A^{2h}, A^{4h} \ldots$ του προβλήματος στα λιγότερο λεπτομερή επίπεδα.

Οι λειτουργίες περιορισμού και επέκτασης παρουσιάζονται παραστατικά στο σχήμα 3.4 για τη μονοδιάστατη περίπτωση. Μια πολύ συνηθισμένη επιλογή για



Σχήμα 3.3: Ο V– και ο W–κύκλος στη μέθοδο πολλαπλών πλεγμάτων. Αν φτάνουμε κάθε φορά πρώτα στο πιο τραχύ επίπεδο (επίπεδο 0) και ύστερα διορθώνουμε κατευθείαν μέχρι και το πιο λεπτομερές επίπεδο (επίπεδο 3) χωρίς ταλαντώσεις έχουμε το V–κύκλο, διαφορετικά έχουμε το W–κύκλο.

τον $(\frac{N}{2}-1)\times(N-1)$ πίνακα περιορισμού I_h^{2h} για τη μονοδιάστατη περίπτωση είναι η εξής (δείχνουμε τον πίνακα για $N=8$):

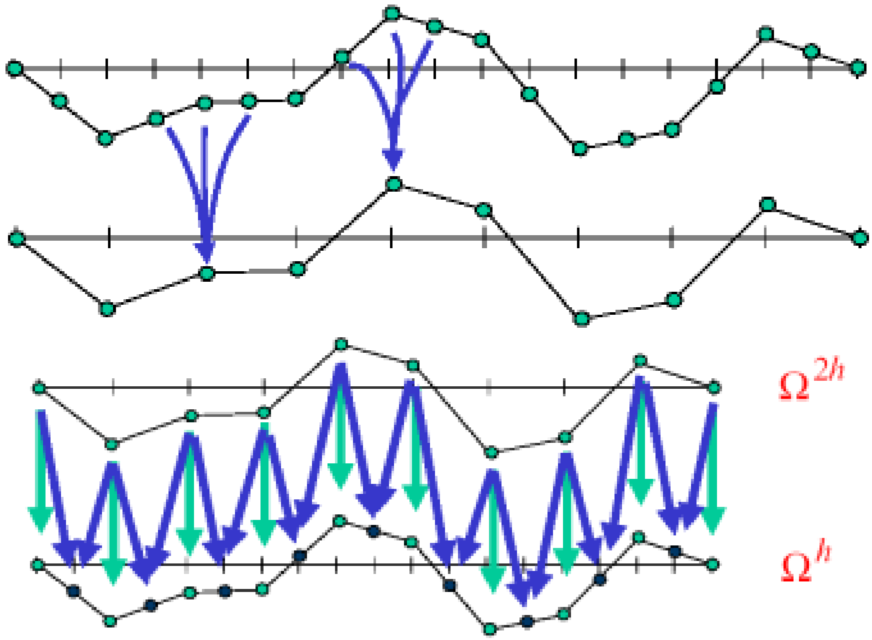
$$I_h^{2h} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 & & & & \\ & & 1/4 & 1/2 & 1/4 & & \\ & & & & 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

Για τον πίνακα επέκτασης έχουμε αντίστοιχα:

$$I_{2h}^h = \begin{pmatrix} 1/2 & & \\ 1 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ & 1 & \\ & 1/2 & 1/2 \\ & & 1 \\ & & 1/2 \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

Αυτοί οι πίνακες ανταποκρίνονται σε γραμμική παρεμβολή και, σημειωτέον, δεν αποτελούν τη μοναδική επιλογή. Παρατηρούμε επίσης ότι οι πίνακες περιορισμού και επέκτασης συνδέονται με μια σχέση της μορφής $I_h^{2h} = c(I_{2h}^h)^T$. Τέλος, μπορεί να αποδειχτεί ότι μια καλή επιλογή για τη μεταφορά του προβλήματος σε πιο τραχειά διάσταση είναι η σχέση $A^{2h} = I_h^{2h}A^hI_{2h}^h$.

Από τα προηγούμενα γίνεται φανερό ότι μπορεί να γίνει αρκετά πολύπλοκος ο προγραμματισμός της μεθόδου πολλαπλών πλεγμάτων από τη στιγμή που πρέπει να παρασχεθούν στο πρόγραμμα οι πίνακες για τον περιορισμό και την επέκταση του προβλήματος. Οι χρήστες συχνά χρειάζονται μια υπορουτίνα που να δέχεται στην είσοδό της τους συντελεστές και το δεξί μέρος του αρχικού προβλήματος και να επιστρέφει τη λύση όπως ένα "μαύρο κουτί", χωρίς ο χρήστης να χρειάζεται να καθορίσει κάτι άλλο. Προς αυτήν την κατεύθυνση αναπτύχθηκε μια σειρά μεθόδων που είναι γνωστές ως *αλγεβρικές μέθοδοι πολλαπλών*



Σχήμα 3.4: Περιορισμός και επέκταση στη μέθοδο πολλαπλών πλεγμάτων. Από το [11].

πλεγμάτων (algebraic multigrid) [63]. Αυτές οι μέθοδοι, σε αντιδιαστολή με τις *γεωμετρικές*, κατασκευάζουν την ιεραρχία των πλεγμάτων αυτόματα, εξετάζοντας τους μη-μηδενικούς συντελεστές του πίνακα A^h. Στις εφαρμογές των Κεφαλαίων 4 και 5 χρησιμοποιούμε έναν τέτοιο κώδικα, που μας διευκολύνει ιδιαίτερα στην περίπτωση των αλγορίθμων στενής ζώνης της ενότητας 5.4, όπου το πρόβλημα είναι ορισμένο σε μη-ορθογώνιο χωρίο και η εφαρμογή μεθόδων γεωμετρικού multigrid καθίσταται δυσχερής.

Ας εξετάσουμε τώρα το κόστος της multigrid μεθοδολογίας. Καταρχήν ο χώρος μνήμης που απαιτείται είναι γραμμικός ως προς τον αριθμό των άγνωστων μεταβλητών. Πράγματι, για ένα πρόβλημα σε d διαστάσεις με N^d αγνώστους κάθε τραχύ επίπεδο χρειάζεται 2^{-d} φορές το χώρο που απαιτείται για το αμέσως πιο λεπτομερές επίπεδο. Εάν έχουμε συνολικά M επίπεδα απαιτείται χώρος μεγαλύτερος του λεπτομερέστερου επιπέδου κατά:

$$1 + 2^{-d} + 2^{-2d} + \cdots + 2^{-(M-1)d} < \frac{1}{1-2^{-d}} \tag{3.35}$$

Για $d = 2$ που μας ενδιαφέρει έχουμε επιβάρυνση μόνο 33%. Έχει επίσης αποδειχτεί ότι για πολλές κλάσεις προβλημάτων το κόστος υπολογισμού είναι κι αυτό γραμμικό ως προς τον αριθμό των άγνωστων μεταβλητών. Αυτό ισχύει και στη δική μας περίπτωση, όπως πειραματικά δείχνουμε στα Κεφάλαια 4 και 5.

Πρέπει, τέλος, να σημειώσουμε ότι η ανάλυση των μεθόδων πολλαπλών πλεγμάτων σε αυτήν την ενότητα μόνο επιφανειακά άγγιξε αυτήν την ευρεία ερευνητική περιοχή. Η μέθοδος, στη σημερινή της μορφή τουλάχιστον, έχει μόνο 20 χρόνια ζωής περίπου. Κάποιες αναφορές που μπορεί ο αναγνώστης να συμβουλευτεί για περαιτέρω πληροφορίες είναι το σχετικά στοιχειώδες βιβλίο των Briggs κ.ά. [12], το βιβλίο του Wesseling [76] (είναι ελεύθερα διαθέσιμο στο Δίκτυο) και το πιο προχωρημένου επιπέδου βιβλίο του Hackbusch [37]. Ακόμα ο δικτυακός τόπος www.mgnet.org έχει συγκεντρωμένο σημαντικό υλικό (προγράμματα, ενημέρωση για συνέδρια, αναφορές κτλ) για αυτά τα θέματα.

Κεφάλαιο 4

Αλγόριθμοι για την Εξίσωση Ανισοτροπικής Διάχυσης

4.1 Εισαγωγή

Στην ενότητα 1.2 είδαμε κάποιες βασικές ιδιότητες της εξίσωσης ανισοτροπικής διάχυσης (1.3) και την εφαρμογή της στη δημιουργία χώρων κλίμακας με επιθυμητές ιδιότητες. Στο παρόν Κεφάλαιο θα εξετάσουμε ταχείς αλγορίθμους για τη μη-γραμμική εξίσωση ανισοτροπικής διάχυσης

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \operatorname{div}\Big(g(\|\nabla u_{s_0}\|)\nabla u\Big) \tag{4.1}$$

με αρχική συνθήκη $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$ και ανακλαστικές (αδιαβατικές) συνοριακές συνθήκες. Η σημασία της μη-γραμμικής χωρικής συνάρτησης g, που παίρνει τιμές στο $(0, 1]$, έχει συζητηθεί στην ενότητα 1.2, όπου και είδαμε κάποιες δυνατές περιπτώσεις για την επιλογή της. Στην ανάλυση που ακολουθεί χρησιμοποιούμε συμβολισμό ανάλογο με αυτόν του [75].

Για να φτάσουμε σε έναν αριθμητικό αλγόριθμο που να προσεγγίζει την εξέλιξη της εξίσωσης (4.1) θα πρέπει πρώτα να διακριτοποιήσουμε τις παραγώγους που εμφανίζονται στην εξίσωση. Θεωρούμε κατά τα γνωστά ένα ομοιόμορφο δισδιάστατο χωρικό πλέγμα με τρόπο που κάθε κυψέλη του πλέγματος να ταυτίζεται με ένα pixel της εικόνας. Επίσης θεωρούμε την εξέλιξη της εξίσωσης σε διακριτά βήματα διάρκειας τ το καθένα. Υιοθετούμε το συμβολισμό $u_{ij}^n \approx u(ih_x, jh_y, n\tau)$ και $g_{ij}^n \approx g(ih_x, jh_y, n\tau)$. Τότε μπορούμε να προσεγγίσουμε τη χωρική παράγωγο στο δεξί μέρος της (4.1) με κεντρικές διαφορές ως εξής:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}(g\nabla u) &\approx \partial_x\Big(g_{ij}\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}-u_{i-\frac{1}{2},j}}{h_x}\Big)+\partial_y\Big(g_{ij}\frac{u_{i,j+\frac{1}{2}}-u_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_y}\Big)\\
&\approx g_{i+\frac{1}{2},j}\frac{u_{i+1,j}-u_{ij}}{h_x^2}-g_{i-\frac{1}{2},j}\frac{u_{ij}-u_{i-1,j}}{h_x^2}\\
&+g_{i,j+\frac{1}{2}}\frac{u_{i,j+1}-u_{ij}}{h_y^2}-g_{i,j-\frac{1}{2}}\frac{u_{ij}-u_{i,j-1}}{h_y^2}
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

Στη συνέχεια και για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό θα χρησιμοποιούμε $h_x = h_y = 1$. Οι τιμές για τα $g_{i\pm\frac{1}{2},j}$ και $g_{i,j\pm\frac{1}{2}}$ προκύπτουν ως μέσος όρος των αντίστοιχων τιμών μεταξύ δύο γειτονικών pixels. Για παράδειγμα $g_{i+\frac{1}{2},j} \approx (g_{i+1,j}+g_{ij})/2$.

Ακόμα, επειδή θα μας χρειαστεί στην ανάλυση που ακολουθεί, θα αναπαριστούμε τη διακριτή εικόνα ως διάνυσμα, αριθμώντας τα pixels πρώτα κατά σειρά και μετά κατά στήλη. Συνεπώς, αν η εικόνα μας αποτελείται από N_x στήλες και N_y γραμμές θα την αναπαριστούμε ως ένα διάνυσμα u διάστασης $N = N_x \times N_y$ έτσι ώστε $u_{i+jN_x} = u_{ij}$. Με το διανυσματικό συμβολισμό και κάνοντας χρήση της προσέγγισης (4.2) για τις χωρικές παραγώγους, προκύπτει από την (4.1) το παρακάτω σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων (χώρος κλίμακας με συνεχή κλίμακα):

$$
\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j\in N(i)} \frac{g_j+g_i}{2}(u_j-u_i) \tag{4.3}
$$

Ο πλήρως διακριτός χώρος κλίμακας προκύπτει αν προσεγγίσουμε τη χρονική παράγωγο στο αριστερό μέρος της (4.1) με την πλευρική διαφορά:

$$
\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} \tag{4.4}
$$

Ενσωματώνοντας την προσέγγιση (4.4) στη σχέση (4.3) προκύπτει η εξίσωση (χώρος κλίμακας με διακριτή κλίμακα):

$$
\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau} = \sum_{j\in N(i)} \frac{g_j+g_i}{2}(u_j-u_i) \tag{4.5}
$$

Με $N(i)$ δηλώνουμε τη γειτονιά των 4 pixels που είναι πιο κοντά στο pixel P_i, δηλαδή τα P_{i-N_x} (n), P_{i-1} (w), P_{i+1} (e) και P_{i+N_x} (s). Ένας βολικός τρόπος να επιβάλλουμε ανακλαστικές συνοριακές συνθήκες είναι να ορίσουμε ότι τα pixels που βρίσκονται στις ακμές και στις γωνίες της εικόνας έχουν 3 ή 2 γείτονες, αντίστοιχα.

Μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις(4.3) και (4.5) με συμβολισμό πινάκων ως εξής:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(u)u \tag{4.6}$$

και

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = A(u)u, \tag{4.7}$$

αντίστοιχα. Ο $A(u) = [a_{ij}(u)]$ είναι ο $N \times N$ πίνακας με στοιχεία:

$$a_{ij}(u) = \begin{cases} \frac{g_i+g_j}{2} & j \in N(i) \\ -\sum_{k\in N(i)} \frac{g_k+g_i}{2} & j = i \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{4.8}$$

Πρόκειται συνεπώς για έναν πίνακα που έχει 5 μη-μηδενικά στοιχεία σε κάθε γραμμή, με τα στοιχεία εκτός κύριας διαγωνίου να αντιστοιχούν στους γείτονες του pixel P_i.

Σημειώνουμε επίσης ότι στις προηγούμενες εξισώσεις έχουμε αφήσει μια ασάφεια: Σε ποια χρονική στιγμή υπολογίζουμε τις εκφράσεις που αντιστοιχούν στη χωρική παράγωγο στη δεξιά πλευρά των εξισώσεων. Στη συνέχεια του Κεφαλαίου αυτού θα εξετάσουμε τρεις ενδιαφέρουσες περιπτώσεις:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = A(u^n)u^n \qquad \text{(explicit σχήμα)} \tag{4.9α$'$}$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = A(u^n)u^{n+1} \qquad \text{(semi-implicit σχήμα)} \tag{4.9β$'$}$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = A(u^n)\frac{u^n + u^{n+1}}{2} \qquad \text{(σχήμα Crank-Nicholson)} \tag{4.9γ$'$}$$

Θα εξετάσουμε επίσης το AOS σχήμα, που είναι μια παραλλαγή του semi-implicit σχήματος που οδηγεί σε πολύ γρήγορη υλοποίηση.

Πριν προχωρήσουμε, θα μελετήσουμε το φάσμα του πίνακα $A(u^k)$, αφού η γνώση βασικών του ιδιοτήτων θα μας χρειαστεί στις επόμενες ενότητες. Θα εξετάσουμε πρώτα την ισοτροπική περίπτωση, που προκύπτει όταν $g \equiv 1$. Τότε η σχέση (4.8) γράφεται:

$$a_{ij}(u) = \begin{cases} 1 & j \in N(i) \\ -\text{card}\{N(i)\} & j = i \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \tag{4.10}$$

με $\text{card}\{N(i)\}$ να δηλώνουμε το πλήθος των γειτόνων του pixel P_i (4, 3 ή 2). Αυτός ο πίνακας δεν είναι παρά η δισδιάστατη εκδοχή του πίνακα S της σχέσης (2.21) (σελ. 43). Με απλή γενίκευση της σχέσης (2.23) προκύπτουν οι ιδιοτιμές:

$$\begin{gathered}\lambda_{s_x s_y} = -4\Big(\sin^2(\frac{s_x\pi}{2N_x}) + \sin^2(\frac{s_y\pi}{2N_y})\Big)\\ \text{για } s_x = 0,\ldots,N_x-1 \text{ και } s_y = 0,\ldots,N_y-1\end{gathered} \tag{4.11}$$

Στην ιδιοτιμή $\lambda_{s_x s_y}$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $v_{s_x s_y}$ με συνιστώσες:

$$\begin{gathered}(v_{i+j*N_x})_{s_x s_y} = \cos\Big(\frac{s_x\pi(2i-1)}{2N_x}\Big)\cos\Big(\frac{s_y\pi(2j-1)}{2N_y}\Big)\\ \text{για } i = 1,\ldots,N_x \text{ και } j = 1,\ldots,N_y\end{gathered} \tag{4.12}$$

Από τη σχέση (4.11) έπεται ότι οι ιδιοτιμές $\lambda_{s_x s_y}$ βρίσκονται στο διάστημα $(-8,0]$, με τις ιδιοτιμές που βρίσκονται πιο κοντά στο 0 να αντιστοιχούν σε αργά μεταβαλλόμενα ιδιοδιανύσματα. Ειδικά η ιδιοτιμή 0 αντιστοιχεί στο σταθερό ιδιοδιάνυσμα $(1,1,\ldots,1)^T$.

Για την ανισοτροπική περίπτωση δεν έχουμε αναλυτικά αποτελέσματα ανάλογα των εξισώσεων (4.11) και (4.12). Με τη βοήθεια του παρακάτω θεωρήματος, όμως, μπορούμε πάλι να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για την κατανομή των ιδιοτιμών του πίνακα A:

Θεώρημα 4.1 (Gerschgorin). *Έστω ένας πίνακας A και $S_i = \sum_{k\neq i}|a_{ik}|$ το άθροισμα των απόλυτων τιμών των μη-διαγώνιων στοιχείων της i–γραμμής του. Τότε κάθε ιδιοτιμή του A βρίσκεται στο μιγαδικό επίπεδο εντός ή, το πολύ, στα όρια ενός τουλάχιστον από τους κύκλους $|\lambda - a_{ii}| = S_i$.*

Απόδειξη. Δες π.χ. το [24], σελ. 8. □

Εφαρμόζοντας το θεώρημα 4.1 στην περίπτωση του πίνακα A, παρατηρούμε ότι

$$S_i = \sum_{k\neq i}|a_{ik}| = \sum_{k\in N(i)} \frac{g_i + g_k}{2} \leq 4, \tag{4.13}$$

αφού η g παίρνει τιμές στο $(0,1]$ και $\mathrm{card}\{N(i)\} \leq 4$. Ακόμα

$$a_{ii} = -\sum_{k\in N(i)} \frac{g_k + g_i}{2} = -S_i \tag{4.14}$$

Άρα οι κύκλοι του θεωρήματος 4.1 είναι οι $|\lambda + S_i| = S_i$, οπότε οι ιδιοτιμές βρίσκονται στα διαστήματα $[-2S_i, 0]$ (οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές γιατί ο A είναι συμμετρικός). Συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψη και την εξίσωση (4.13), οι ιδιοτιμές του πίνακα A στην ανισοτροπική περίπτωση βρίσκονται στο διάστημα $[-8,0]$.

Με απευθείας αντικατάσταση μπορούμε και εδώ να διαπιστώσουμε ότι η ιδιοτιμή 0 αντιστοιχεί στο σταθερό ιδιοδιάνυσμα $(1,1,\ldots,1)^T$. Αριθμούμε τις $N = N_xN_y$ ιδιοτιμές ως $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$, αρχίζοντας με το $\lambda_1 = 0$ και προχωρώντας προς τις πιο αρνητικές τιμές $\lambda_s \leq \lambda_{s-1}, s = 2,\ldots,N$. Επίσης κατασκευάζουμε μια ορθοκανονική βάση $\{v_s\}$ με τα ιδιοδιανύσματα του συμμετρικού πίνακα A, όπου v_s είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_s.

Είμαστε τώρα πια έτοιμοι να προχωρήσουμε στην ανάλυση των αριθμητικών σχημάτων της εξίσωσης (4.9). Στην ανάλυσή μας θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του πίνακα της υποενότητας 2.1.4 επειδή θα μας βοηθήσει να βγάλουμε ποιοτικά χρήσιμα συμπεράσματα. Μια εναλλακτική προσέγγιση θα ήταν να βασιστούμε στη θεωρία των διακριτών χώρων κλίμακας που ανέπτυξε ο Weickert στα πλαίσια της διδακτορικής του διατριβής. Αυτή η θεωρία δεν θα αναπτυχθεί εδώ. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο [73].

4.2 Το explicit σχήμα

Το explicit σχήμα για την εξίσωση διάχυσης, όπως είδαμε στη σχέση (4.9), ορίζεται από την επαναληπτική εξίσωση:

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} = A(u^n)u^n, \tag{4.15}$$

που γράφεται στη μορφή

$$u^{n+1} = [I + \tau A(u^n)]u^n \tag{4.16}$$

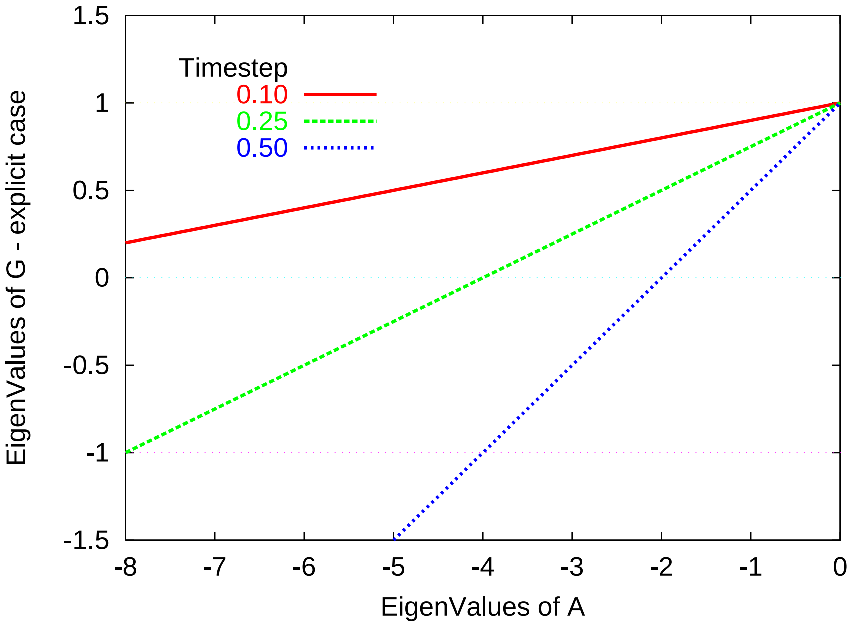
Με αυτό το σχήμα προσεγγίζουμε τη συνεχή εξίσωση με διαφορές πρώτης τάξης, όσο αφορά τη χρονική παράγωγο, και με διαφορές δεύτερης τάξης, όσο αφορά τη χωρική παράγωγο. Για να αναλύσουμε την ευστάθεια αυτού του σχήματος με τη μέθοδο του πίνακα (βλέπε υποενότητα 2.1.4) παρατηρούμε ότι γράφεται στη μορφή:

$$u^{n+1} = G_n^{ex}u^n = G_n^{ex}G_{n-1}^{ex}\ldots G_0^{ex}u^0 \tag{4.17}$$

με $G_n^{ex} = [I + \tau A(u^n)]$. Από το Λήμμα 2.4 προκύπτει τότε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα G_n^{ex} είναι οι

$$\lambda_s^{ex}(n) = 1 + \tau\lambda_s(n) \tag{4.18}$$

και τα ιδιοδιανύσματα τα $\{v_s(n)\}, s = 1,\ldots,N$, όπου $\lambda_s(n), \{v_s(n)\}$ είναι οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του $A(u^n)$. Η σχέση (4.18) απεικονίζεται στο σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: Στο σχήμα βλέπουμε πώς απεικονίζονται οι ιδιοτιμές $\lambda_s(n)$ του πίνακα $A(u^n)$, που βρίσκονται στο διάστημα $[-8, 0]$, στις ιδιοτιμές $\lambda_s^{ex}(n)$ του πίνακα G_n^{ex} του explicit σχήματος, μέσω της σχέσης (4.18) και για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου τ. Για να έχουμε ευστάθεια, θα πρέπει όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα G_n^{ex} να βρίσκονται μεταξύ ± 1. Αυτό συνεπάγεται $\tau \leq 0.25$.

Συγκρίνοντας την εξίσωση (4.17) με τη γενική επαναληπτική μέθοδο (2.14), παρατηρούμε ότι τώρα έχουμε μη-στάσιμη διαδικασία, γιατί ο πίνακας της επανάληψης εξαρτάται από το χρόνο n. Και πάλι όμως προκύπτει ότι η μέθοδος της εξίσωσης (4.17) είναι ευσταθής, αν $\rho(G_n) \leq 1, \forall n \geq 0$. Πράγματι,

$$
\begin{aligned}
u^{n+1} = G_n^{ex} u^n &= G_n^{ex} \sum_{s=1}^{N} c_s(n) v_s(n) \\
&= \sum_{s=1}^{N} c_s(n) \lambda_s^{ex}(n) v_s(n),
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

από όπου έπεται ότι, αν $\rho(G_n) \leq 1, \forall n \geq 0$, τότε (λαμβάνουμε υπόψη ότι τα

$\{v_s(n)\}$ αποτελούν ορθοκανονική βάση στο $\mathbb{R}^N$):

$$
\begin{aligned}
\|u^{n+1}\|_p &= \Big\| \sum_{s=1}^{N} c_s(n)\lambda_s^{ex}(n)v_s(n)\Big\|_p \\
&= \Big\{ \sum_{s=1}^{N}|c_s(n)\lambda_s^{ex}(n)|^p\Big\}^{1/p} \\
&\leq \Big\{ \sum_{s=1}^{N}|c_s(n)|^p\Big\}^{1/p} = \|u^n\|_p \\
&\leq \cdots \leq \|u^0\|_p
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Το κριτήριο για ευστάθεια του explicit σχήματος είναι λοιπόν

$$\rho(G_n^{ex}) = \max_{1\leq s\leq N}|\lambda_s^{ex}(n)| \leq 1, \forall n \geq 0 \tag{4.21}$$

Αν λάβουμε υπόψη την εξίσωση (4.18), προκύπτει $\max_{1\leq s\leq N}|1+\tau\lambda_s(n)| \leq 1$. Επειδή $\lambda_s(n) \in [-8, 0]$, έχουμε τελικά τον ακόλουθο περιορισμό για ευστάθεια (βλέπε και σχήμα 4.1):

$$\tau \leq \frac{1}{4} \tag{4.22}$$

Το άνω φράγμα στο χρονικό βήμα που επιβάλλει η εξίσωση (4.22) είναι στην πράξη πολύ περιοριστικό. Οι εφαρμογές της ανισοτροπικής διάχυσης απαιτούν συχνά την εξέλιξη της εξίσωσης μέχρι χρόνο $t \gtrsim 10^2$, που σημαίνει ότι απαιτούνται εκατοντάδες επαναλήψεις της διαδικασίας (4.16) μέχρι να φτάσουμε στο τελικό αποτέλεσμα. Αν λάβουμε υπόψη ότι κάθε επανάληψη διαρκεί περίπου 0.1 sec (στην υλοποίησή μας και για γκρίζα εικόνα διάστασης 256×256), απαιτούνται δεκάδες δευτερόλεπτα μέχρι να φτάσουμε στην επιθυμητή λύση. Αυτό είναι ένα μεγάλο μειονέκτημα του explicit σχήματος που προσπαθούν να υπερβούν τα υπόλοιπα σχήματα που εξετάζουμε στη συνέχεια.

4.3 Το implicit σχήμα

Το implicit σχήμα για την εξίσωση διάχυσης, όπως είδαμε στη σχέση (4.9), ορίζεται από την επαναληπτική εξίσωση:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = A(u^n)u^{n+1}, \tag{4.23}$$

που γράφεται στη μορφή

$$[I - \tau A(u^n)]u^{n+1} = u^n \tag{4.24}$$

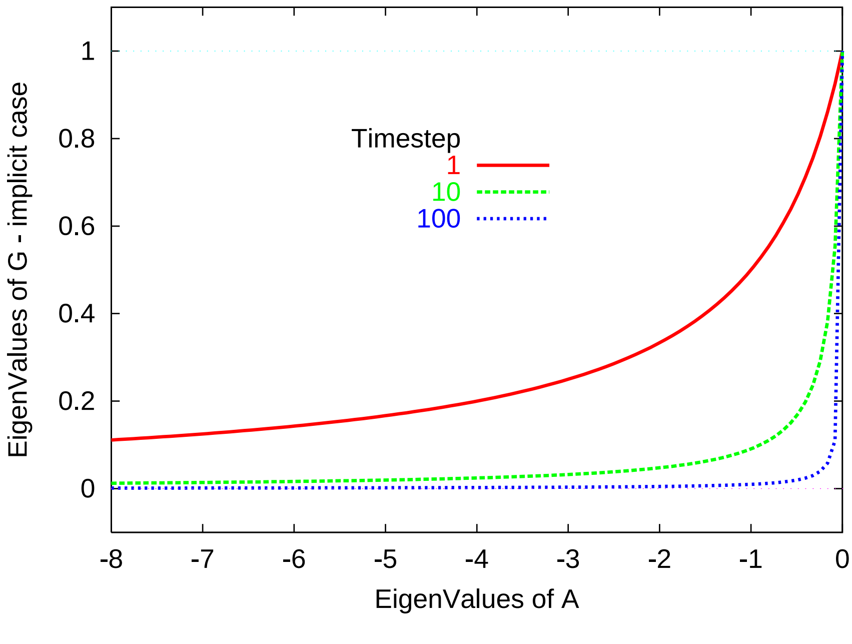
Βλέπουμε δηλαδή ότι σε κάθε βήμα του αλγορίθμου θα πρέπει να λύνουμε ένα γραμμικό σύστημα. Για να αναλύσουμε την ευστάθεια αυτού του σχήματος θα ακολουθήσουμε ανάλογη πορεία με την ανάλυση που κάναμε στην προηγούμενη ενότητα για το explicit σχήμα. Η επαναληπτική διαδικασία είναι τώρα η εξής:

$$u^{n+1} = G_n^{im} u^n = G_n^{im} G_{n-1}^{im} \dots G_0^{im} u^0 \tag{4.25}$$

με $G_n^{im} = [I - \tau A(u^n)]^{-1}$. Από το Λήμμα 2.4 προκύπτει τότε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα G_n^{im} είναι οι

$$\lambda_s^{im}(n) = \frac{1}{1 - \tau \lambda_s(n)} \tag{4.26}$$

και τα ιδιοδιανύσματα τα $\{v_s(n)\}, s = 1, \dots, N$, όπου $\lambda_s(n), \{v_s(n)\}$ είναι οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του $A(u^n)$. Η σχέση (4.26) απεικονίζεται στο σχήμα 4.2.



Σχήμα 4.2: Στο σχήμα βλέπουμε πώς απεικονίζονται οι ιδιοτιμές $\lambda_s(n)$ του πίνακα $A(u^n)$, που βρίσκονται στο διάστημα $[-8, 0]$, στις ιδιοτιμές $\lambda_s^{im}(n)$ του πίνακα G_n^{im} του implicit σχήματος, μέσω της σχέσης (4.26) και για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου τ. Βλέπουμε ότι, ανεξάρτητα από το μέγεθος του χρονικού βήματος τ, οι ιδιοτιμές του πίνακα G_n^{im} βρίσκονται μεταξύ 0 και 1, που συνεπάγεται ευστάθεια δίχως όρους.

Βλέπουμε τώρα ότι η συνθήκη για ευστάθεια (4.21), γραμμένη για την περίπτωση του implicit σχήματος,

$$\begin{aligned} &\rho(G_n^{im}) \leq 1, \forall n \geq 0 \\ \Leftrightarrow &\max_{1\leq s\leq N} \left|\frac{1}{1-\tau\lambda_s(n)}\right| \leq 1, \forall n \geq 0 \end{aligned} \tag{4.27}$$

ικανοποιείται δίχως όρους στο χρονικό βήμα. Φθάνουμε έτσι στο κεντρικό συμπέρασμα ότι *το implicit σχήμα είναι ευσταθές δίχως όρους*.

Βέβαια, από την άλλη πλευρά, το implicit σχήμα, όπως εξάλλου και το explicit αποτελεί προσέγγιση του συνεχούς προβλήματος με σφάλμα $O(\tau + h_x^2 + h_y^2)$. Αυτό σημαίνει ότι στην πράξη περιοριζόμαστε όσο αφορά το μέγεθος του χρονικού βήματος τ από την επιθυμητή ακρίβεια. Αποδεικνύεται όμως πειραματικά ότι για τις περισσότερες εφαρμογές της όρασης υπολογιστών έχουμε ικανοποιητικά αποτελέσματα από πλευράς ακρίβειας ακόμα και όταν το τ είναι κατά πολύ μεγαλύτερο του 0.25, που είναι η ανώτατη επιτρεπτή τιμή στην περίπτωση του explicit σχήματος.

Το προφανές μειονέκτημα του explicit σχήματος είναι βέβαια ότι σε κάθε βήμα απαιτείται η επίλυση ενός μεγάλου γραμμικού συστήματος. Ο πίνακας συντελεστών των αγνώστων $I - \tau A(u^n)$ έχει 5 (το πολύ) μη-μηδενικά στοιχεία σε κάθε γραμμή, αφού τα μη-μηδενικά στοιχεία του $A(u^n)$ στην i–γραμμή είναι τα $a_{i,i-N_x}, a_{i,i-1}, a_{ii}, a_{i,i+1}, a_{i,i+N_x}$. Για την επίλυση συστημάτων με πίνακες αυτής της μορφή δεν υπάρχει δυστυχώς αποδοτικός απευθείας αλγόριθμος σαν τον αλγόριθμο του Thomas για τα τριδιαγώνια συστήματα (βλ. ενότητα 3.1). Οι απλές επαναληπτικές μέθοδοι της ενότητας 3.1 με τη σειρά τους αργούν πολύ να συγκλίνουν [75].

Οι μέθοδοι πολλαπλών πλεγμάτων της ενότητας 3.3 αποτελούν μια πολύ ελκυστική επιλογή για την ταχεία επίλυση του συστήματος (4.24). Τέτοιες μέθοδοι, και πιο συγκεκριμένα γεωμετρικές μέθοδοι πολλαπλών πλεγμάτων, εφαρμόστηκαν για πρώτη φορά στο συγκεκριμένο πρόβλημα από τον Acton το 1998 [1]. Εμείς στην υλοποίησή μας χρησιμοποιήσαμε τεχνικές αλγεβρικού multigrid. Πειραματικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στην ενότητα 4.6. Για λεπτομέρειες του αλγεβρικού multigrid κώδικα που χρησιμοποιήσαμε, δες το Παράρτημα Α΄.

4.4 Το AOS σχήμα

Το AOS (Additive Operator Splitting) σχήμα για την εξίσωση διάχυσης, είναι μια παραλλαγή του implicit σχήματος που εξετάσαμε στην προηγούμενη ενότητα και προτάθηκε από τους Weickert κ.ά. το 1998 [75]. Το σχήμα αυτό πετυχαίνει ευστάθεια δίχως όρους, όπως το implicit σχήμα, και απαιτεί την επίλυση 2 τριδιαγωνίων συστημάτων αντί της επίλυσης του "δυσκολότερου" γραμμικού συστήματος (4.24).

Πιο συγκεκριμένα, η εξίσωση ορισμού του implicit σχήματος (4.24) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$[I - \tau \sum_{l \in \{x,y\}} A_l(u^n)]u^{n+1} = u^n \tag{4.28}$$

Ο κάθε ένας από τους πίνακες $A_x(u^n), A_y(u^n)$ συγκεντρώνει τις χωρικές παραγώγους της εξίσωσης (4.2) που αντιστοιχούν στις διευθύνσεις x, y αντίστοιχα. Συνεπώς οι πίνακες $A_l(u^n)$ είναι τριδιαγώνιοι (για την ακρίβεια μπορούν να αναχθούν σε τριδιαγώνιους με κατάλληλη επαναρίθμηση των μεταβλητών). Το AOS σχήμα συνίσταται στην ακόλουθη παραλλαγή του implicit σχήματος: Αντί να έχουμε την επαναληπτική διαδικασία

$$u^{n+1} = [I - \tau \sum_{l \in \{x,y\}} A_l(u^n)]^{-1} u^n \tag{4.29}$$

(που είναι η εξίσωση ορισμού του implicit σχήματος), έχουμε τη διαδικασία:

$$u^{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{l \in \{x,y\}} [I - 2\tau A_l(u^n)]^{-1} u^n \tag{4.30}$$

Αποδεικνύεται, παίρνοντας αναπτύγματα Taylor, ότι και αυτή η μέθοδος είναι μια προσέγγιση του συνεχούς προβλήματος με ακρίβεια πρώτης τάξης. Ακόμη μπορεί να επεκταθεί με προφανή τρόπο σε περισσότερες από 2 διαστάσεις.

Παρατηρώντας την εξίσωση (4.30) βλέπουμε ότι προσπαθεί να προσεγγίσει τη δισδιάστατη διάχυση με δύο διαδικασίες διάχυσης, μία στον $x-$ και μία στον y–άξονα, που είναι ασύζευκτες μεταξύ τους. Πιο αναλυτικά, ο αλγόριθμος χωρίζεται στα εξής βήματα:

1. Διάχυση κατά μήκος του x–άξονα με βήμα 2τ. Μια μερική λύση προκύπτει από την επίλυση του τριδιαγώνιου συστήματος $[I - 2\tau A_x(u^n)]u_x^{n+1} = u^n$.

2. Διάχυση κατά μήκος του y–άξονα με βήμα 2τ. Η άλλη μερική λύση προκύπτει από την επίλυση του τριδιαγώνιου συστήματος $[I - 2\tau A_y(u^n)]u_y^{n+1} = u^n$.

3. Η τελική λύση προκύπτει ως ο μέσος όρος των δύο μερικών λύσεων $u^{n+1} = 0.5(u_x^{n+1} + u_y^{n+1})$.

Η δίχως όρους ευστάθεια του σχήματος αυτού προκύπτει άμεσα από τη δίχως όρους ευστάθεια του μονοδιάστατου implicit σχήματος.

Το AOS σχήμα είναι σήμερα η πιο διαδεδομένη μέθοδος για ταχεία ανισοτροπική διάχυση. Κάθε βήμα της μεθόδου κοστίζει, σύμφωνα με το [75], περίπου 2 φορές περισσότερο από κάθε βήμα του απλού explicit σχήματος, το οποίο όμως έχει το χρονικό περιορισμό $\tau \leq 0.25$. Συνεπώς η εφαρμογή του AOS σχήματος με χρονικό βήμα $\tau = 5$ οδηγεί σε επιτάχυνση κατά μία τάξη μεγέθους σε σχέση με το explicit σχήμα. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό, καθώς βήματα μέχρι $\tau \approx 10$ οδηγούν το AOS σχήμα σε αποτελέσματα ικανοποιητικής ακρίβειας, σύμφωνα πάντα με το [75].

Βέβαια το AOS σχήμα αναμένουμε να μην συμπεριφέρεται ικανοποιητικά για πολύ μεγάλα χρονικά βήματα $\tau \gtrsim 50$. Αυτό που πρέπει να είναι ιδιαίτερα αντιληπτό σε αυτήν την περίπτωση είναι η μεγάλη απόκλιση από την περιστροφική συμμετρία, αποτέλεσμα της αποσύζευξης των δύο διευθύνσεων διάχυσης στην εξίσωση (4.30). Σε αυτήν την περίπτωση το implicit σχήμα της προηγούμενης ενότητας, αν και κοστίζει ≈ 5 φορές περισσότερο από το AOS σχήμα, πρέπει να υπερέχει. Αυτό το θέμα θα αποτελέσει αντικείμενο της έρευνάς μας την αμέσως επόμενη περίοδο.

4.5 Το σχήμα των Crank-Nicholson

Από τα σχήματα της σχέσης (4.9) μένει να εξεταστεί αυτό των Crank-Nicholson, που ορίζεται από την επαναληπτική εξίσωση:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = A(u^n)\frac{u^n + u^{n+1}}{2}, \tag{4.31}$$

που γράφεται στη μορφή

$$[I - \frac{\tau}{2}A(u^n)]u^{n+1} = [I + \frac{\tau}{2}A(u^n)]u^n \tag{4.32}$$

Πλεονέκτημα αυτού του σχήματος σε σχέση με όλα τα προηγούμενα είναι η δευτέρου βαθμού ακρίβειά του στο χρόνο, τουλάχιστον στη γραμμική περίπτωση. Με άλλα λόγια το σφάλμα που εισάγει σε σχέση με την ακριβή λύση είναι $O(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2)$. Αυτό το καθιστά ιδιαίτερα δημοφιλές στην επίλυση παραβολικών εξισώσεων (δες π.χ. [24]). Μια ενδιαφέρουσα μελέτη της ανισοτροπικής διάχυσης με το σχήμα Crank-Nicholson μπορεί να βρει ο αναγνώστης στο [7].

Για την επίλυση του γραμμικού συστήματος (4.32) χρησιμοποιήσαμε στην υλοποίησή μας τεχνικές πολλαπλών πλεγμάτων, όπως και στην περίπτωση του implicit σχήματος, αφού οι πίνακες συντελεστών των αγνώστων έχουν και στις δύο περιπτώσεις την ίδια δομή.

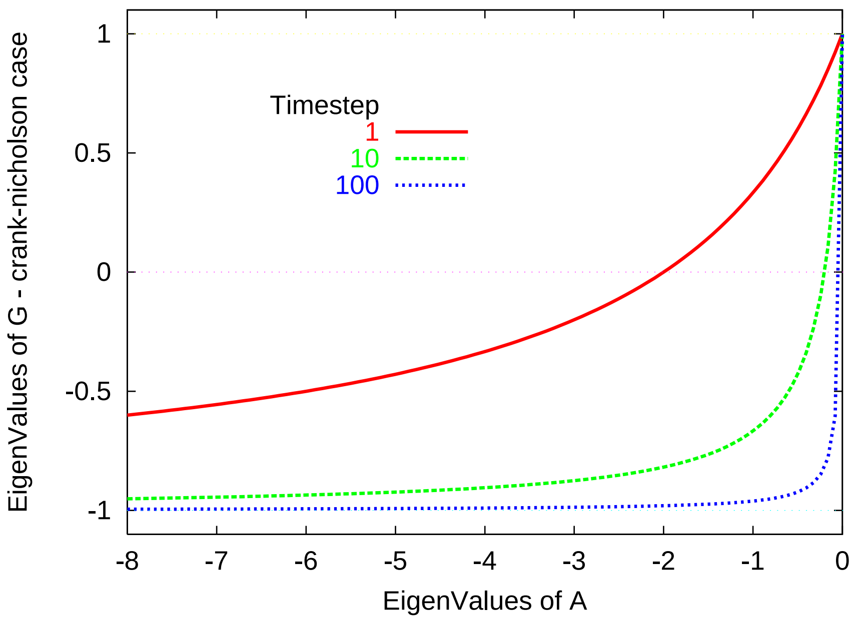
Και αυτό το σχήμα είναι ευσταθές χωρίς όρους, κάτι που διαισθητικά το περιμέναμε αφού πρόκειται για σχήμα που απαιτεί την επίλυση γραμμικού συστήματος σε κάθε βήμα. Πράγματι, ο πίνακας της επαναληπτικής διαδικασίας είναι τώρα ο

$$G_n^{cn} = [I - \frac{\tau}{2}A(u^n)]^{-1}[I + \frac{\tau}{2}A(u^n)] \tag{4.33}$$

με ιδιοτιμές

$$\lambda_s^{cn}(n) = \frac{1 + \frac{\tau}{2}\lambda_s(n)}{1 - \frac{\tau}{2}\lambda_s(n)} \tag{4.34}$$

και ιδιοδιανύσματα τα $\{v_s(n)\}, s = 1, \ldots, N$, όπου $\lambda_s(n), \{v_s(n)\}$ είναι κατά τα γνωστά οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του $A(u^n)$. Η σχέση (4.34) απεικονίζεται στο σχήμα 4.3. Επειδή όλες οι ιδιοτιμές είναι μεταξύ ± 1 έπεται ότι



Σχήμα 4.3: Στο σχήμα βλέπουμε πώς απεικονίζονται οι ιδιοτιμές $\lambda_s(n)$ του πίνακα $A(u^n)$, που βρίσκονται στο διάστημα $[-8, 0]$, στις ιδιοτιμές $\lambda_s^{cn}(n)$ του πίνακα G_n^{im} του σχήματος Crank-Nicholson, μέσω της σχέσης (4.34) και για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου τ. Βλέπουμε ότι, ανεξάρτητα από το μέγεθος του χρονικού βήματος τ, οι ιδιοτιμές του πίνακα G_n^{cn} βρίσκονται μεταξύ ± 1, που συνεπάγεται ευστάθεια δίχως όρους.

έχουμε ευστάθεια σύμφωνα με τη συνθήκη (4.21), για κάθε τ.

Κοιτάζοντας όμως συγκριτικά τα σχήματα 4.2 και 4.3 που δίνουν τις ιδιοτιμές του πίνακα επανάληψης G για το implicit σχήμα και για το σχήμα Crank-Nicholson, αντίστοιχα, βλέπουμε μια ποιοτική διαφορά μεταξύ τους, παρόλο που και στις δύο περιπτώσεις οι ιδιοτιμές βρίσκονται μεταξύ ± 1. Οι ιδιοτιμές του implicit σχήματος παραμένουν πάντα θετικές, ανεξάρτητα από το μέγεθος του χρονικού βήματος τ. Αντίθετα, οι ιδιοτιμές του σχήματος Crank-Nicholson που αντιστοιχούν σε υψίσυχνες ιδιολύσεις είναι αρνητικές και κοντά στο -1.

Μόνο όμως οι θετικές ιδιοτιμές αντιστοιχούν στην πραγματική λύση της εξίσωσης διάχυσης. Πράγματι, εάν θεωρήσουμε την ακόλουθη γραμμική εκδοχή της εξίσωσης (4.6):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au \tag{4.35}$$

μπορούμε, με χωρισμό των μεταβλητών, να γράψουμε αναλυτικά τη λύση της στην ακόλουθη μορφή (ανάπτυγμα Fourier):

$$u(t) = \sum_{s=1}^{N} c_s v_s e^{\lambda_s t}, \tag{4.36}$$

όπου $\lambda_s < 0$, $\{v_s\}$ είναι οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A, αντίστοιχα, και c_s είναι οι προβολές (συντελεστές Fourier) της αρχικής συνθήκης $u(0)$ στα ιδιοδιανύσματα $\{v_s\}$. Βλέπουμε από την (4.36) ότι κάθε ρυθμός της πραγματικής λύσης αποσβένεται μονότονα (με εκθετική απόσβεση). Αυτό σχετίζεται και με τις ιδιότητες της εξίσωσης ανισοτροπικής διάχυσης που είδαμε στην υποενότητα 1.2.3. Το γεγονός ότι κάποιες ιδιοτιμές του σχήματος Crank-Nicholson είναι αρνητικές συνεπάγεται ότι η αριθμητική λύση του σχήματος Crank-Nicholson εμφανίζει ταλαντώσεις, κάτι που δεν αντιστοιχεί στη συμπεριφορά της πραγματικής λύσης. Το φαινόμενο αυτό είναι περισσότερο έντονο, όσο μεγαλύτερο είναι το χρονικό βήμα τ (οπότε το σημείο τομής της καμπύλης με τον οριζόντιο άξονα στο σχήμα 4.3 μετακινείται προς τα δεξιά) και όσο πιο απότομες μεταβολές έχει η εικόνα που επεξεργαζόμαστε (οπότε το υψίσυχνο φασματικό της περιεχόμενο γίνεται πιο σημαντικό). Συνεπώς η επίδοση του σχήματος Crank-Nicholson για μεγάλο τ είναι περιορισμένη. Σε αυτές τις περιπτώσεις η χρήση του implicit σχήματος είναι προτιμότερη, γιατί η προκύπτουσα αριθμητική λύση εμφανίζει μονότονη απόσβεση σε συμφωνία με την πραγματική λύση (4.36).

4.6 Πειράματα και συγκρίσεις

Αυτή η ενότητα συμπληρώνει τη θεωρητική συζήτηση που προηγήθηκε για τα διάφορα αριθμητικά σχήματα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση της μη-γραμμικής εξίσωσης διάχυσης. Όλα τα πειράματα έγιναν στο υπολογιστικό σύστημα που περιγράφεται στο Παράρτημα Α΄. Ως test image χρησιμοποιήθηκε μια θορυβώδης εκδοχή της γκρίζας εικόνας "Cameraman" (256×256 pixels, 256 στάθμες γκρίζου, λευκός προσθετικός θόρυβος). Ως μοντέλο διάχυσης χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση (1.3) με τη g να δίνεται από την (1.4), με παράμετρο κανονικοποίησης $s_0 = 0.1$ και παράμετρο αντίθεσης $\sigma = 0.01$ σε όλα τα πειράματα που ακολουθούν. Οι διαστάσεις του χωρικού πλέγματος είναι παντού $h_x = h_y = 1$. Πρέπει να σημειωθεί ότι δεν έχουμε ακόμα πειραματικά αποτελέσματα για το AOS σχήμα.

Πείραμα 1:
Καταρχήν εξετάζουμε την ταχύτητα της μεθόδου πολλαπλών πλεγμάτων στην επίλυση του γραμμικού συστήματος που προκύπτει κατά τη διακριτοποίηση με το implicit σχήμα. Μας ενδιαφέρουν τόσο οι απόλυτες χρονικές τιμές, όσο και η εξάρτηση του χρόνου εκτέλεσης από το μέγεθος του προβλήματος. Ο πίνακας 4.1 μας δίνει το χρόνο (CPU time) που απαιτείται για ένα βήμα του implicit σχήματος (δηλαδή για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος) (σε υπολογιστή Pentium 700 MHz). Δεν περιλαμβάνουμε το χρόνο για input-output. Η γραμμική εξάρτηση του χρόνου εκτέλεσης από το μέγεθος του προβλήματος (εδώ ο αριθμός των pixels της εικόνας) είναι φανερή και δείχνει την ισχύ της μεθόδου των πολλαπλών πλεγμάτων.

Μέγεθος	#pixels ($\times 10^4$)	Χρόνος (sec)
100×100	1.0	0.42
256×256	6.6	2.50
512×512	26.2	10.6

Πίνακας 4.1: Η ταχύτητα της μεθόδου πολλαπλών πλεγμάτων σε συνάρτηση με το μέγεθος της εικόνας.

Πείραμα 2:
Το επόμενο πείραμα που παραθέτουμε αφορά την επίδοση των τριών σχημάτων στον καθαρισμό μιας θορυβώδους εκδοχής της εικόνας "Cameraman". Τα συγκριτικά αποτελέσματα για τους τρεις αλγορίθμους απεικονίζονται στα σχήματα 4.4 και 4.5 (που είναι μια μεγεθυσμένη εκδοχή του 4.4). Τρέξαμε πρώτα το explicit σχήμα με το μέγιστο επιτρεπόμενο $\tau = 0.25$ και για 400 επαναλήψεις μέχρι χρόνο $t = 100$. Οπτικά ανάλογα αποτελέσματα μπορούμε να πετύχουμε με μία μόνο επανάληψη του implicit σχήματος για $\tau = 3000$, πετυχαίνοντας μεγάλη οικονομία στο χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου (3.3 αντί για 80.4 sec). Σημειώνουμε ότι απαιτήθηκε επιμήκυνση του ονομαστικού χρόνου t για να πάρουμε οπτικά αντίστοιχα αποτελέσματα, όπως θα δούμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια πιο κάτω. Με 10 επαναλήψεις του Crank-Nicholson σχήματος με $\tau = 10$ πετυχαίνουμε επίσης καλά αποτελέσματα σε χρόνο 25.2 sec.

Πείραμα 3:
Στο σχήμα 4.6 βλέπουμε τη διαφορά στην απόδοση του implicit σχήματος όταν το εφαρμόζουμε αλλάζοντας το πλήθος των επαναλήψεων και το χρονικό βήμα


Αρχική εικόνα με θόρυβο explicit(400 επ.,$\tau = 0.25, 80.4$sec)


implicit(1 επ.,$\tau = 3 \cdot 10^3, 3.3$sec) Crank-Nicholson(10 επ.,$\tau = 10, 25.2$sec)

Σχήμα 4.4: Συγκριτικά αποτελέσματα ανισοτροπικής διάχυσης για καθαρισμό εικόνας από θόρυβο με τα τρία διαφορετικά αριθμητικά σχήματα. Παραθέτουμε τον αριθμό των επαναλήψεων, το μέγεθος του χρονικού βήματος και το χρόνο που απαιτήθηκε για την εκτέλεση του πειράματος.


Αρχική εικόνα με θόρυβο


explicit


implicit


Crank-Nicholson

Σχήμα 4.5: Λεπτομερής άποψη των αποτελεσμάτων του σχήματος 4.4.

τ με τρόπο που το γινόμενό τους (ο συνολικός χρόνος t) να παραμένει σταθερό. Βλέπουμε ότι με 2 επαναλήψεις πετυχαίνουμε έναν καλό συμβιβασμό ακρίβειας του αποτελέσματος και χρόνου εκτέλεσης του πειράματος. Σημειωτέον ότι θα μπορούσαμε να πετύχουμε και σε μία επανάληψη αποτελέσματα πιο κοντά στην ακριβή λύση[1] αυξάνοντας το χρονικό βήμα, όπως κάναμε στο πείραμα των σχημάτων 4.4 και 4.5.

Πείραμα 4:
Στο σχήμα 4.7 δείχνουμε το φαινόμενο μη ικανοποιητικής απόσβεσης των υψίσυχνων συνιστωσών της εικόνας με το σχήμα Crank-Nicholson που είχαμε συζητήσει στην ενότητα 4.5. Παρατηρούμε ότι το συγκεκριμένο σχήμα για μεγάλο τ αδυνατεί να μειώσει ικανοποιητικά τον υψίσυχνο θόρυβο. Μάλιστα, αντίθετα από ότι περιμένουμε από την ακριβή λύση της εξίσωσης διάχυσης, όσο μεγαλώνει το τ, τόσο επιτείνεται το πρόβλημα. Αντίθετα βλέπουμε ότι το implicit σχήμα εμφανίζει πολύ καλύτερη συμπεριφορά.

[1]Το πρόβλημα μη-γραμμικής διάχυσης δεν επιδέχεται αναλυτική λύση. Με τον όρο 'άκριβής λύση" εννοούμε εδώ την αριθμητική λύση που προκύπτει με οποιοδήποτε από τα εξεταζόμενα σχήματα όταν το χρονικό βήμα τείνει στο 0.

10 επαναλήψεις, $\tau = 100$, 24.5 sec

5 επαναλήψεις, $\tau = 200$, 12.8 sec

2 επαναλήψεις, $\tau = 500$, 5.6 sec

1 επανάληψη, $\tau = 1000$, 3.5 sec

Σχήμα 4.6: Συγκριτικά αποτελέσματα για το implicit σχήμα με ένα ή περισσότερα βήματα. Τρέξαμε τον αλγόριθμο μέχρι $t = 1000$ με διαφορετικούς συνδυασμούς αριθμού επαναλήψεων και χρονικού βήματος τ. Παραθέτουμε τον αριθμό των επαναλήψεων, το μέγεθος του χρονικού βήματος και το χρόνο που απαιτήθηκε για την εκτέλεση του πειράματος.

implicit, $\tau = 100$

Crank-Nicholson, $\tau = 100$

implicit, $\tau = 1000$

Crank-Nicholson, $\tau = 1000$

Σχήμα 4.7: Συγκριτικά αποτελέσματα των σχημάτων implicit και Crank-Nicholson για μία επανάληψη με μεγάλο τ. Βλέπουμε πως με το σχήμα Crank-Nicholson και για μεγάλο τ οι υψίσυχνες συνιστώσες εμφανίζουν ταλάντωση και αποσβένονται λίγο.

Κεφάλαιο 5

Αλγόριθμοι για Γεωδαιτικά Ενεργά Περιγράμματα

5.1 Εισαγωγή

Στην ενότητα 1.3 περιγράψαμε το μοντέλο των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων και είδαμε ότι όταν το εκφράζουμε με φορμαλισμό επιπεδοσυνόλων έχει πολύ καλές ιδιότητες όσο αφορά τη δυνατότητα του μοντέλου να χειρίζεται αλλαγές στην τοπολογία της καμπύλης. Από την άλλη πλευρά όμως, ένας σοβαρός περιορισμός των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων, όταν διακριτοποιούνται με τις γενικές μεθόδους εξέλιξης επιπεδοσυνόλων (βλ. εξίσωση (2.34)), είναι ότι οδηγούν σε αρκετά αργές υλοποιήσεις, λόγω του ισχυρού περιορισμού στο μέγεθος του χρονικού βήματος που επιβάλλει η συνθήκη CFL (2.32). Οι τεχνικές στενής ζώνης της ενότητας 2.3 επιταχύνουν αρκετά την υλοποίηση αλλά το πρόβλημα της αργής εξέλιξης του περιγράμματος ουσιαστικά παραμένει.

Για να αντιμετωπίσουν αυτούς τους περιορισμούς, οι Goldenberg κ.ά. πρώτοι παρατήρησαν το 2001 στο [29] τη συσχέτιση μεταξύ της εξίσωσης εξέλιξης των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων και της εξίσωσης ανισοτροπικής διάχυσης θερμότητας και πρότειναν τη χρήση του AOS σχήματος της ενότητας 4.4 για την ταχεία εξέλιξη των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων. Μια παραλλαγή αυτής της εργασίας από την ομάδα του Weickert εμφανίζεται στο [74].

Οι ταχείς αλγόριθμοι που παρουσιάζονται στα [29] και [74] βασίζονται στο AOS σχήμα και στον αλγόριθμο του Thomas (δες ενότητες 4.4 και 3.1, αντίστοιχα) για την ταχεία επίλυση τριδιαγώνιων γραμμικών συστημάτων. Η δική μας εργασία βασίζεται στο implicit σχήμα και στις μεθόδους πολλαπλών πλεγμάτων για την ταχεία επίλυση των αραιών γραμμικών συστημάτων που προκύπτουν από την εφαρμογή του (δες ενότητες 4.3 και 3.3, αντίστοιχα). Οι πολύ καλές ιδιότητες του implicit σχήματος για πολύ μεγάλο χρονικό βήμα τ που μελετήσαμε στην περίπτωση της εξίσωσης ανισοτροπικής διάχυσης θα δούμε ότι ισχύουν και για την εξέλιξη γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων και οδηγούν σε έναν πρακτικά $O(N)$ αλγόριθμο που οδηγεί γρήγορα το περίγραμμα στην τελική του θέση, πολλές φορές ακόμα και σε μία επανάληψη. Ο αλγόριθμος που προτείνεται "παντρεύεται" με ευθύ τρόπο με τεχνικές ανάλυσης σε πολλαπλές κλίμακες και τεχνικές στενής ζώνης, οδηγώντας σε ακόμα ταχύτερες εκδοχές του. Τέλος, τα μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιούμε για την ανάλυση του αλγορίθμου μας αποκαλύπτουν και μια ενδιαφέρουσα συσχέτιση των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων με μεθόδους τομής γράφων για κατάτμηση εικόνων που έχουν εισαχθεί τα τελευταία χρόνια στην Όραση Υπολογιστών.

5.2 Συσχέτιση με την εξίσωση ανισοτροπικής διάχυσης

Θυμούμενοι τη συζήτηση της ενότητας 1.3.2, γράφουμε ξανά εδώ την εξίσωση των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων χωρίς το balloon force με το φορμαλισμό επιπεδοσυνόλων:

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \|\nabla u\| \mathrm{div}\Big(g(\|\nabla I\|)\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}\Big), \tag{5.1}$$

όπου I είναι η εικόνα και u η συνάρτηση ενσωμάτωσης του επιπεδοσυνόλου. Εάν υποθέσουμε ότι διακριτοποιούμε την εξίσωση (5.1) και πριν από κάθε βήμα επανάληψης επαναρχικοποιούμε τη συνάρτηση ενσωμάτωσης u ώστε να είναι ο προσημασμένος μετασχηματισμός ευκλείδειας απόστασης από το περίγραμμα, οπότε $\|\nabla u\| = 1$, τότε κάθε βήμα του αριθμητικού αλγορίθμου θα αντιστοιχεί με ένα βήμα ανισοτροπικής διάχυσης σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \mathrm{div}\big(g(x,y)\nabla u\big), \tag{5.2}$$

με ανακλαστικές συνοριακές συνθήκες, όπου ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας $g(x,y) = g(\|\nabla I\|)$ εξαρτάται από την εικόνα και όχι από την εξελισσόμενη συνάρτηση u, που σημαίνει ότι το μοντέλο της διάχυσης είναι πλέον γραμμικό. Παρατηρούμε επίσης ότι ο τελεστής χωρικής παραγώγισης $\mathrm{div}\big(g(x,y)\nabla\big)$ στο δεξί μέρος της εξίσωσης (5.2) είναι χρονικά αμετάβλητος.

Αν διακριτοποιήσουμε την εξίσωση (5.2), μπορούμε, ακολουθώντας τις συμβάσεις του Κεφαλαίου 4, να τη γράψουμε με συμβολισμό πινάκων στην παρακάτω μορφή:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = Au \tag{5.3}$$

με $A = [a_{ij}]$ να είναι ο χρονικά αμετάβλητος πίνακας με στοιχεία

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{g_i+g_j}{2} & j \in N(i) \\ -\sum_{k \in N(i)} \frac{g_k+g_i}{2} & j = i \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{5.4}$$

Πρόκειται συνεπώς για μια χρονικά αμετάβλητη μορφή του αντίστοιχου πίνακα διάχυσης του προηγούμενου Κεφαλαίου (για την ακρίβεια είναι ο $A(0)$ του προηγούμενου Κεφαλαίου). Έτσι όλες οι ιδιότητες που μελετήσαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο αναφορικά με την κατανομή των ιδιοτιμών του πίνακα A και των πινάκων επανάληψης G των διαφόρων σχημάτων ισχύουν και εδώ.

Πρέπει όμως να τονίσουμε εδώ και μια σημαντική ποιοτική διαφορά μεταξύ του προβλήματος ανισοτροπικής διάχυσης και του προβλήματος των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων, που θα παίξει σημαντικό ρόλο στην αξιολόγηση των αριθμητικών σχημάτων που θα παρουσιάσουμε. Στο πρόβλημα της ανισοτροπικής διάχυσης ενδιαφερόμαστε συνήθως για την εξέλιξη της εξίσωσης μέχρι κάποιο σχετικά μικρό χρόνο $t \approx 10^2$, για να ικανοποιήσουμε απαιτήσεις εφαρμογών όπως π.χ. καθαρισμός της εικόνας από το θόρυβο. Συχνά επίσης χρειαζόμαστε όχι μόνο το τελικό αλλά και τα ενδιάμεσα αποτελέσματα, σε εφαρμογές που απαιτούν πολλά στιγμιότυπα του χώρου κλίμακας. Από την άλλη πλευρά, στο πρόβλημα των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων συνήθως μας ενδιαφέρει μόνο η τελική κατάσταση ισορροπίας της καμπύλης, που συχνά απαιτείται μακρύ χρονικό διάστημα $t \gtrsim 10^4$ για να επιτευχθεί. Ας μην ξεχνάμε ότι η εξίσωση (5.1) δεν είναι παρά μια εξελικτική διαδικασία που μας οδηγεί τελικά στο (τοπικό) ελάχιστο ενός συναρτησιακού του οποίου η ελαχιστοποίηση ήταν ο αρχικός μας στόχος. Αυτή η κατηγορία χρονικής εξέλιξης χαρακτηρίζεται στην ορολογία της αριθμητικής ανάλυσης ως *ψευδοεξέλιξη (pseudo-timestepping)*. Έτσι επιθυμητό από έναν αλγόριθμο για το πρόβλημα των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων θα ήταν να φτάνει στην τελική θέση της καμπύλης στον ελάχιστο αριθμό βημάτων, χωρίς να μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα να μας δίνει και τα ενδιάμεσα βήματα αυτής της εξέλιξης.

5.3 Ένας ταχύς αλγόριθμος για την εξέλιξη των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων

Τα αριθμητικά σχήματα που παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο 4 μπορούν, τουλάχιστον καταρχήν, να χρησιμοποιηθούν και εδώ. Στα [29] και [74] οι συγγραφείς υιοθετούν το AOS σχήμα για την εξέλιξη της συνάρτησης u. Η επαναληπτική διαδικασία είναι τότε η εξής:

$$u^{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{l \in \{x,y\}} [I - 2\tau A_l]^{-1} u^n \tag{5.5}$$

Όπως σχολιάσαμε στην περίπτωση της ανισοτροπικής διάχυσης, το AOS σχήμα αποσυζεύγνει την εξέλιξη της συνάρτησης σε δύο ανεξάρτητες κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις με αποτέλεσμα να οδηγεί σε εύκολα επιλύσιμο αλγεβρικό σύστημα. Αυτή η προσέγγιση όμως οδηγεί σε μειωμένη ακρίβεια, έλλειψη ισοτροπικότητας και παραβίαση της συμμετρίας περιστροφής όταν το χρονικό βήμα τ γίνει πολύ μεγάλο. Έτσι έχουμε έναν πολύ σημαντικό περιορισμό στο μέγεθος του αποδεκτού χρονικού βήματος τ.

Από τα υπόλοιπα σχήματα, αυτό των Crank-Nicholson δεν αναμένουμε να είναι αποδοτικό λόγω των ισχυρών ταλαντώσεων που παρουσιάζει όταν το τ γίνεται πολύ μεγάλο. Το explicit σχήμα, παρότι κάθε βήμα του στοιχίζει λίγο, είναι ιδιαίτερα αργό εξαιτίας του πολύ δεσμευτικού περιορισμού $\tau \leq 0.25$.

Για αυτό το λόγο εμείς στην εργασία μας υιοθετούμε το implicit σχήμα της ενότητας 4.3 για την εξέλιξη των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων. Το σχήμα έχει ως εξής:

$$[I - \tau A]u^{n+1} = u^n \tag{5.6}$$

Για την επίλυση του προκύπτοντος αλγεβρικού συστήματος χρησιμοποιούμε τις μεθόδους πολλαπλών πλεγμάτων της ενότητας 3.3. Αξίζει να σημειωθεί ότι χρειάζεται να δημιουργήσουμε μόνο κατά την πρώτη επανάληψη τους πίνακες περιορισμού I_h^{2h} και επέκτασης I_{2h}^h, καθώς και τους πίνακες $A^{2h}, A^{4h} \ldots$ του προβλήματος στα λιγότερο λεπτομερή επίπεδα, καθώς ο πίνακας επανάληψης είναι χρονικά αμετάβλητος. Αυτό σημαίνει ότι οι επόμενες επαναλήψεις κοστίζουν λιγότερο.

Πριν από κάθε βήμα της επανάληψης 5.6 η συνάρτηση u πρέπει να επαναρχικοποιείται στον προσημασμένο μετασχηματισμό ευκλείδειας απόστασης από το περίγραμμα. Προκειμένου να επιτευχθεί αυτό μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι δύο μέθοδοι της ενότητας 2.3, δηλαδή η μέθοδος της εξίσωσης $d_t + sign(d)(\|\nabla d\| - 1) = 0$ και ο αλγόριθμος ταχείας προέλασης. Εμείς υλοποιήσαμε και τις δύο μεθόδους. Ο αλγόριθμος ταχείας προέλασης αποδείχτηκε ελαφρά καλύτερος για την περίπτωσή μας.

Ο αλγόριθμος που προτείνουμε για την ταχεία εξέλιξη των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων έχει συνολικά ως εξής:

1. *Αρχικοποίηση.* Από μια αρχική διακριτή καμπύλη Γ_0 δημιουργούμε ένα αρχικό διάνυσμα ενσωμάτωσης u^0 στο επίπεδο της εικόνας και θέτουμε $n = 0$.

2. *Επαναρχικοποίηση.* Το διάνυσμα u^n επαναρχικοποιείται σε προσημασμένο μετασχηματισμό ευκλείδειας απόστασης από το μηδενικό επιπεδοσύνολό του.

3. *Εξέλιξη.* Το διάνυσμα u^{n+1} προκύπτει με επίλυση του συστήματος $[I - \tau A]u^{n+1} = u^n$ με multigrid τεχνικές.

4. *Συνθήκη τερματισμού.* Θέτουμε $n = n + 1$. Εάν $n \geq iter$ ο αλγόριθμος τερματίζεται, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 2.

Ο αλγόριθμος έχει δύο παραμέτρους, το μέγεθος του χρονικού βήματος τ και τον αριθμό των επαναλήψεων $iter$. Όπως θα δούμε στην ενότητα 5.6 κατά την παρουσίαση των πειραματικών αποτελεσμάτων για τον αλγόριθμο, επιλέγοντας ως χρονικό βήμα τ έναν πολύ μεγάλο αριθμό $\approx 10^{10}$ αρκούν μία ή το πολύ δύο επαναλήψεις για να φτάσουμε στην τελική κατάσταση της καμπύλης.

Για συνηθισμένες διαστάσεις εικόνων το πιο ακριβό τμήμα του αλγορίθμου είναι το τρίτο, που περιλαμβάνει την επίλυση ενός μεγάλου αλγεβρικού συστήματος εξισώσεων. Όπως είδαμε στην ενότητα 4.6, η επίλυση του γραμμικού συστήματος με μεθόδους πολλαπλών πλεγμάτων είναι $O(N)$ διαδικασία, όπου N είναι ο αριθμός των pixels της εικόνας. Άρα και ο αλγόριθμός μας έχει πρακτικά $O(N)$ πολυπλοκότητα.

5.4 Μέθοδοι πολλαπλών αναλύσεων σε συνδυασμό με τεχνικές στενής ζώνης

Δύο μέθοδοι που μας βοηθούν να επιταχύνουμε την εξέλιξη των επιπεδοσυνόλων όταν χρησιμοποιούμε τα explicit αριθμητικά σχήματα της ενότητας 2.2 είναι οι τεχνικές στενής ζώνης, που είδαμε στην ενότητα 2.3, και οι *τεχνικές πολλαπλών αναλύσεων (multiresolution techniques)*.

Η ιδέα της μεθόδου πολλαπλών αναλύσεων είναι να θεωρήσουμε την αρχική εικόνα I_0 διάστασης $N = N_x \times N_y$ ως τη βάση μιας πυραμίδας αποτελούμενης από h εικόνες $\{I_k, k = 0, 1, \ldots, h-1\}$ διάστασης $(2^{-k}N_x) \times (2^{-k}N_y)$ η καθεμιά. Το κάθε επίπεδο της πυραμίδας προκύπτει από το κατώτερό του με κάποια διαδικασία απεικόνισης που σκοπό έχει την όσο το δυνατόν πιο πιστή αναπαράσταση της εικόνας του κατώτερού του επιπέδου όταν μόνο το 1/4 των pixels είναι διαθέσιμα. Στο τέλος αυτής της ενότητας θα εξετάσουμε με ποιές μεθόδους μπορεί να γίνει αυτή η απεικόνιση.

Αφού έχουμε δημιουργήσει αυτήν την ιεραρχία εικόνων, ξεκινάμε την εξέλιξη της καμπύλης στο πιο τραχύ επίπεδο I_{h-1}. Η καμπύλη φτάνει σχετικά γρήγορα στην τελική της κατάσταση, αφού η εικόνα στο τραχύ επίπεδο έχει μικρό αριθμό από pixels. Στη συνέχεια απεικονίζουμε την καμπύλη στο αμέσως πιο λεπτομερές επίπεδο I_{h-2} και την αφήνουμε να συνεχίσει την εξέλιξή της από την κατάσταση στην οποία απεικονίστηκε ως τη νέα τελική για το επίπεδο στο οποίο βρίσκεται κατάσταση. Συνεχίζουμε κατ΄ αυτόν τον τρόπο αναδρομικά μέχρι να φτάσουμε στο επίπεδο πλήρους ανάλυσης I_0 όπου η διαδικασία ολοκληρώνεται. Η μέθοδος πολλαπλών αναλύσεων επιταχύνει την εξέλιξη της καμπύλης, γιατί σε κάθε επίπεδο της πυραμίδας ξεκινάμε με μια αρχική θέση της καμπύλης που αποτελεί μια πολύ καλή εκτίμηση της τελικής της θέσης, οπότε δε χρειαζόμαστε πολύ χρόνο μέχρι να την προσεγγίσουμε.

Η μέθοδος πολλαπλών αναλύσεων μπορεί επωφελώς να συνδυαστεί με τον αλγόριθμο που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα και να τον επιταχύνει. Στην περίπτωση του δικού μας αλγορίθμου θα μπορούσε βέβαια κανείς δικαιολογημένα να ισχυριστεί ότι δεν έχουμε κάποιο κέρδος αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο των πολλαπλών αναλύσεων όπως την περιγράψαμε, γιατί ούτως ή άλλως φτάνουμε στην τελική θέση της καμπύλης σε ένα ή το πολύ δύο βήματα, οπότε δεν κερδίζουμε κάτι σε χρόνο εάν είμαστε πιο κοντά στην τελική θέση της καμπύλης εκμεταλλευόμενοι τα αποτελέσματα της εξέλιξής της στις πιο τραχειές κλίμακες. Αυτός ο ισχυρισμός όμως καταρρίπτεται εάν συνδυάσουμε τη μέθοδο των πολλαπλών αναλύσεων με τεχνικές στενής ζώνης. Πράγματι, εάν εφαρμόσουμε τον ταχύ αλγόριθμο της ενότητας 5.3 σε όλη την έκταση της πιο τραχειάς εικόνας I_{h-1} και κατόπιν, καθώς προχωράμε προς τα πιο λεπτομερή επίπεδα της πυραμίδας, τον εφαρμόζουμε μόνο σε μια στενή ζώνη γύρω από την εκάστοτε θέση της καμπύλης, τότε μπορούμε να έχουμε αξιοσημείωτη μείωση του χρόνου που απαιτείται για την εξεύρεση της τελικής θέσης του περιγράμματος. Αυτές οι ιδέες απεικονίζονται στο σχήμα 5.6.

Ο αλγόριθμος τώρα παίρνει τη μορφή:

1. *Πυραμιδική ανάλυση.* Δημιουργούμε από την αρχική εικόνα I_0 την πυραμίδα $\{I_k, k = 0, 1, \ldots, h-1\}$. Θέτουμε $k = h-1$ και αρχικοποιούμε το περίγραμμα στο επίπεδο $h-1$.

2. *Εξέλιξη.* Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο της ενότητας 5.3 σε μια στενή ζώνη γύρω από την αρχική θέση του περιγράμματος στο επίπεδο k.

3. *Μεταφορά.* Εάν $k > 0$, μεταφέρουμε το περίγραμμα στο επίπεδο $k-1$, θέτουμε $k = k-1$ και πηγαίνουμε πίσω στο Βήμα 2. Διαφορετικά ο αλγόριθμος ολοκληρώνεται.

Το ακριβές κέρδος στο χρόνο εκτέλεσης εξαρτάται από την πολιτική μας για το πλάτος της στενής ζώνης σε κάθε επίπεδο της πυραμίδας. Μια πιθανή τακτική που είναι εύκολο να αναλυθεί θα ήταν να εκτελούμε τον αλγόριθμο της ενότητας 5.3 και στα $4^{-(h-1)}N$ pixels της τραχειάς εικόνας I_{h-1} και καθώς προχωράμε προς τα πιο λεπτομερή επίπεδα της εικόνας να έχουμε διαρκώς τον ίδιο αριθμό από pixels στη στενή ζώνη, δηλαδή $4^{-(h-1)}N$. Τότε θα έπρεπε να λύσουμε h γραμμικά συστήματα (όσα και τα επίπεδα της πυραμίδας) με $4^{-(h-1)}N$ αγνώστους το καθένα. Επειδή η επίλυση του γραμμικού συστήματος έχει γραμμική πολυπλοκότητα ως προς το πλήθος των μεταβλητών, έπεται ότι ο χρόνος που αφιερώνουμε στην επίλυση γραμμικών συστημάτων είναι τώρα ίσος με $h4^{-(h-1)}$ φορές το χρόνο που θα έπρεπε να αφιερώσουμε χωρίς την εφαρμογή τεχνικών πολλαπλών αναλύσεων και στενής ζώνης. Αυτός ο παράγοντας ισούται με $1/2, 3/16$ και $1/16$ για πυραμίδα με $h = 2, 3$ ή 4 επίπεδα, αντίστοιχα, που είναι μια πολύ σημαντική βελτίωση. Αυτός ο παράγοντας δε λαμβάνει υπόψη το χρόνο που απαιτείται για την κατασκευή της πυραμίδας.

Στην ανάλυση που προηγήθηκε είδαμε ότι όσο πιο πολλά επίπεδα χρησιμοποιούμε, τόσο το κέρδος μας αυξάνεται. Υπάρχει βέβαια ένας σοβαρός περιορισμός αναφορικά με το πλήθος των επιπέδων που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε. Πιο συγκεκριμένα, για να έχει νόημα η εφαρμογή των τεχνικών πολλαπλών αναλύσεων που συζητήσαμε, θα πρέπει τα αντικείμενα που μας ενδιαφέρουν να είναι ορατά στο πιο τραχύ επίπεδο I_{h-1}. Αυτό οδηγεί στην πράξη σε ένα μέγιστο αριθμό $3-4$ επιπέδων πυραμιδικής ανάλυσης για τις περισσότερες εφαρμογές.

Είναι επίσης σημαντικό ο αλγόριθμος που χρησιμοποιούμε για τη δημιουργία της πυραμίδας να να μην θολώνει και να μην μετακινεί τις ακμές των αντικειμένων. Πυραμίδες που βασίζονται σε μορφολογικά φίλτρα [32] ή στο μετασχηματισμό wavelet [38] εμφανίζουν αυτές τις επιθυμητές ιδιότητες και επιπλέον υλοποιούνται αποδοτικά. Στην υλοποίησή μας σε πρώτη φάση κάνουμε χρήση μιας απλής γραμμικής πυραμίδας αλλά σκοπεύουμε σύντομα να δοκιμάσουμε τη συμπεριφορά μορφολογικών πυραμίδων στο πρόβλημά μας.

5.5 Συσχέτιση με μεθόδους τομής γράφων για κατάτμηση

Οι *μέθοδοι τομής γράφων (graph cuts)* είναι μια σχετικά καινούργια τεχνική που χρησιμοποιείται τα τελευταία χρόνια για κατάτμηση εικόνων [68], [64]. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μια σύντομη εισαγωγή στη μέθοδο αυτή.

Θεωρούμε έναν μη-κατευθυνόμενο γράφο με βάρη $G = (V, E)$, όπου V, E είναι τα σύνολα των κόμβων και των ακμών του γράφου, αντίστοιχα. Ο γράφος αυτός προκύπτει από την αρχική εικόνα θεωρώντας κάποια δομικά στοιχεία της εικόνας (image primitives) ως κόμβους n_i του γράφου. Η ακμή w_{ij} του γράφου αναπαριστά την ένταση της συγγένειας μεταξύ δύο κόμβων n_i, n_j. Στη δική μας περίπτωση κόμβοι είναι τα pixels της εικόνας και θεωρούμε ότι το κάθε pixel συγγενεύει μόνο με τα 4 γειτονικά του, με βαθμό συγγένειας

$$w_{ij} = \begin{cases} \frac{g_i+g_j}{2} & j \in N(i) \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{5.7}$$

Αν κάνουμε χρήση της ορολογίας που μόλις εισάγαμε, σκοπός της κατάτμησης της εικόνας είναι να διαμερίσουμε το σύνολο των κόμβων σε ομογενή τμήματα, έτσι ώστε οι κόμβοι που ανήκουν στο ίδιο τμήμα να είναι ισχυρά συνδεδεμένοι μεταξύ τους και οι κόμβοι που ανήκουν σε διαφορετικά τμήματα να εμφανίζουν χαλαρή σύνδεση μεταξύ τους. Ένας τρόπος για να πετύχουμε αυτήν τη διαμέριση θα ήταν να χωρίσουμε την αρχική εικόνα σε δύο τμήματα, τα οποία με τη σειρά τους μπορούμε ύστερα να διχοτομήσουμε αναδρομικά. Στη συνέχεια ακολουθούμε τη συζήτηση από το [64].

Προκειμένου να διχοτομήσουμε ένα γράφο μπορούμε να θεωρήσουμε ένα διάνυσμα v με τρόπο που το πρόσημο της συνιστώσας του v_i να καθορίζει τη συμμετοχή του κόμβου n_i στο ένα ή το άλλο υποσύνολο. Ένας τρόπος για να ορίσουμε αυτό το διάνυσμα θα ήταν να λύσουμε το παρακάτω πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$v^* = \operatorname{argmin} \sum_{ij} w_{ij}(v_i - v_j)^2 \tag{5.8}$$

υπό τους περιορισμούς $\sum_i v_i = 0$ και $\sum_i v_i^2 = 1$. Ελαχιστοποιώντας την παράσταση της εξίσωσης (5.8) δίνουμε τιμές που διαφέρουν λίγο μεταξύ τους σε κόμβους που έχουν μεγάλη συνάφεια w_{ij}. Οι δύο περιορισμοί αποκλείουν τις μη επιθυμητές τετριμένες λύσεις $v = (1, 1, \ldots, 1)^T$ και $v = (0, 0, \ldots, 0)^T$ αντίστοιχα. Σημειωτέον ότι αυτή η επιλογή συνάρτησης κόστους οδηγεί στην τομή *average cut*. Άλλες επιλογές που οδηγούν σε διαφορετικές τομές παρουσιάζονται στο [68]. Μια συγκριτική μελέτη των αποτελεσμάτων που προκύπτουν με εφαρμογή διαφορετικών κριτηρίων τομής γράφων παρουσιάζεται στο [69].

Ύστερα από κάποιες πράξεις καταλήγουμε ότι το πρόβλημα (5.8) ισοδυναμεί με το παρακάτω πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$v^* = \operatorname{argmin} \frac{v^T L v}{v^T v}, \text{ με } v^T (1, 1, \ldots, 1)^T = 0, \tag{5.9}$$

όπου ο πίνακας $L = [l_{ij}]$ ονομάζεται *Laplacian* πίνακας του γράφου G και έχει στοιχεία

$$l_{ij} = \begin{cases} -w_{ij} & j \neq i \\ \sum_{j \neq i} w_{ij} & j = i \end{cases} \tag{5.10}$$

Παρατηρούμε αμέσως ότι στην περίπτωση που ορίζουμε τον G από την εξίσωση (5.7) τότε ισχύει

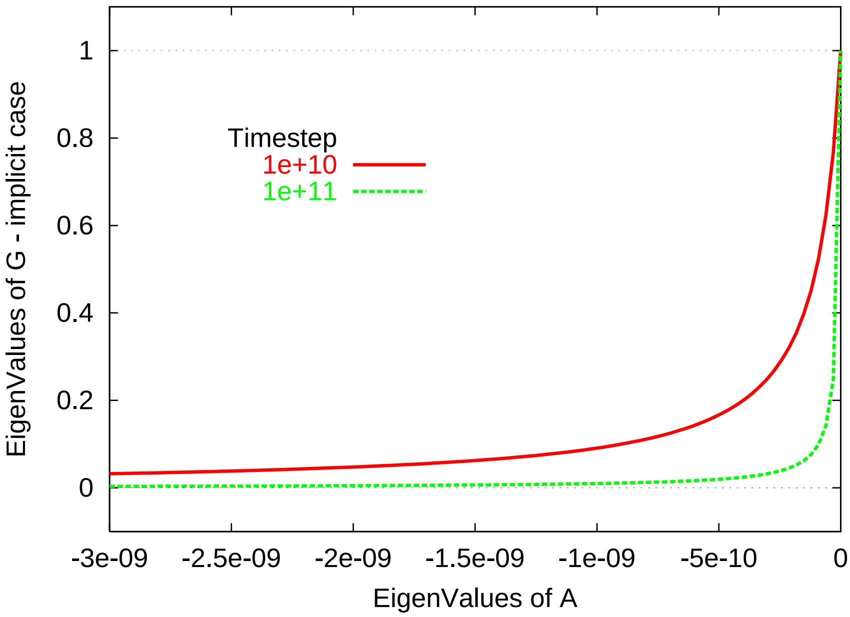
$$L = -A, \tag{5.11}$$

όπου A είναι ο πίνακας που ορίζεται από τη σχέση (5.4) και έχει παίξει σημαντικό ρόλο στη μελέτη της εξίσωσης ανισοτροπικής διάχυσης και του μοντέλου των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων.

Για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης (5.9) είναι γνωστό (δες το [64] και τις εκεί αναφορές) ότι το ελάχιστο επιτυγχάνεται για $v = v_2$ και αυτό το ελάχιστο είναι το $2\lambda_2^G = -2\lambda_2$, όπου λ_2, v_2 είναι κατά τα γνωστά οι ιδιοτιμές του A με τη σύμβαση αρίθμησής τους που ακολουθούμε σε αυτό το κεφάλαιο. Συνεπώς η διχοτόμηση του γράφου ανάγεται στην εύρεση του ιδιοδιανύσματος v_2 του πίνακα A. Για να επιτευχθεί αυτό θα μπορούσαμε να ακολουθήσουμε μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης για την ταχεία εύρεση ιδιοτιμών αραιών πινάκων (δες π.χ. το [30]).

Όπως εξηγείται στο [68], πέρα από το v_2 μερικά ακόμα ιδιοδιανύσματα v_s του πίνακα A που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές λ_s κοντά στο 0 δίνουν σημαντική πληροφορία για την κατάτμηση της εικόνας σε περισσότερες από 2 περιοχές μέσα σε ένα βήμα. Μέσω της διαίσθησης που έχουμε αναπτύξει σε αυτήν την εργασία μπορούμε να το καταλάβουμε αυτό ως εξής. Θεωρούμε ότι έχουμε μια εικόνα που απεικονίζει π.χ. μια σκακιέρα διαστάσεων 2×2. Εάν οι ακμές μεταξύ των τετραγώνων της σκακιέρας είχαν άπειρη αντίθεση, τότε ο πίνακας A θα διαμεριζόταν ακριβώς σε 4 τμήματα και η μηδενική ιδιοτιμή θα είχε πολλαπλότητα 4. Στην πράξη όμως και λόγω του διακριτού χαρακτήρα του πλέγματος στο οποίο ορίζουμε την εικόνα, το $\|\nabla I\|$ έχει πεπερασμένη τιμή και ο πίνακας A δε διαμερίζεται ακριβώς. Συνεπώς η μηδενική ιδιοτιμή έχει πολλαπλότητα 1 και έχουμε άλλες 3 ιδιοτιμές πολύ κοντά στο 0 (πολύ πιο κοντά στο 0 σε σχέση με το $\lambda_2 \approx -\pi^2/N_{x(y)}^2$ που προβλέπει η εξίσωση (4.11) για την ισοτροπική περίπτωση). Συνεπώς προκύπτει ότι για τη διαδικασία της κατάτμησης πέρα από το v_2 κάποια ακόμα ιδιοδιανύσματα v_s παίζουν σημαντικό ρόλο, αρκεί το λ_s να είναι κοντά στο 0. Η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται είναι $|\lambda_s| \ll -\pi^2/N_{x(y)}^2$.

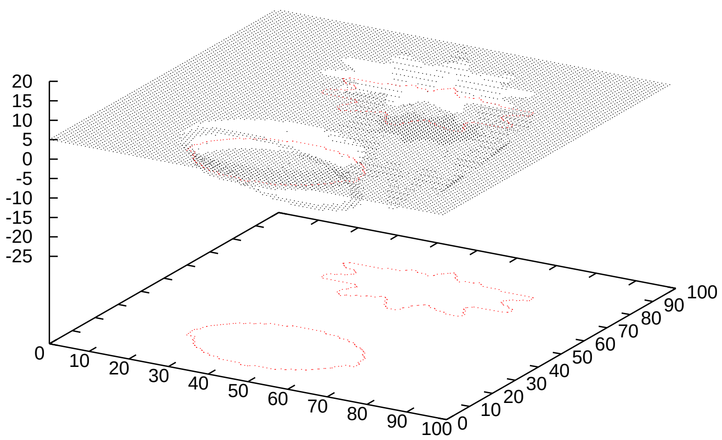
Μετά από τη συζήτηση που προηγήθηκε μπορούμε να καταλάβουμε σχετικά εύκολα τη σχέση του αλγορίθμου ταχείας εξέλιξης γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων με τις ιδέες από τις μεθόδους τομής γράφων που παρουσιάσαμε. Στο σχήμα 5.1 δείχνουμε πώς απεικονίζονται οι ιδιοτιμές του πίνακα A στις ιδιοτιμές του πίνακα επανάληψης G^{im} για τις πολύ μεγάλες τιμές του τ που χρησιμοποιούμε στην πράξη. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας G^{im} επενεργεί πάνω στο u^n κατά κάποιο τρόπο ως βαθυπερατό φίλτρο καταπιέζοντας ισχυρά όλες τις συνιστώσες του u^n που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές μακριά από το 0. Πιο ποσοτικά, οι συνιστώσες που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές $\lambda_s < -99/\tau$ καταπιέζονται περισσότερο από 99% σε μία μόνο επανάληψη. Για να έχουμε καλύτερη αίσθηση των μεγεθών, για $\tau = 10^{10}$ οι συνιστώσες που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές $\lambda_s < -10^{-8}$ καταπιέζονται περισσότερο από 99%. Για σύγκριση, για μια εικόνα διαστάσεων 100×100 ο τύπος της ισοτροπικής περίπτωσης δίνει $\lambda_2 \approx -\pi^2/N^2_{x(y)} = -10^{-3}$. Συνεπώς ο ταχύς αλγόριθμος εξέλιξης των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων όταν εφαρμοστεί με πολύ μεγάλο τ εξουδετερώνει όλες τις συνιστώσες του u^n εκτός από αυτές που αντιστοιχούν στα ιδιοδιανύσματα που παίζουν σημαντικό ρόλο στην κατάτμηση της εικόνας (η συνιστώσα που αντιστοιχεί στο διάνυσμα $v_0 = (1, 1, \ldots, 1)^T$ επίσης διατηρείται).



Σχήμα 5.1: Στο σχήμα βλέπουμε πώς απεικονίζονται οι ιδιοτιμές λ_s του πίνακα A, στις ιδιοτιμές λ_s^{im} του πίνακα G^{im} του implicit σχήματος μέσω της σχέσης (4.26), όταν η παράμετρος τ παίρνει πολύ μεγάλες τιμές. Βλέπουμε ότι για πολύ μεγάλο τ, οι ιδιοτιμές του πίνακα επανάληψης G^{im} είναι αμελητέες εκτός από αυτές που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_s του πίνακα A που είναι πολύ κοντά στο μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι μόνο οι χαμηλόσυχνες συνιστώσες του u παραμένουν μετά την επαναληπτική διαδικασία. Με κατάλληλη επιλογή του τ μπορούμε να αποσβέσουμε όλες τις συνιστώσες εκτός από εκείνες που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_s που είναι σημαντικές στην κατάτμηση.

Στο σχήμα 5.2 κάνουμε μια προσπάθεια να επιδείξουμε τις ιδέες αυτές. Το παράδειγμα βασίζεται σε μία επανάληψη του ταχέως αλγορίθμου για την εξέλιξη γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων για την ίδια εικόνα που εμφανίζεται και στο σχήμα 5.3.

Θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς πώς εξηγείται από τη σκοπιά της ανάλυσης αυτής της ενότητας η εξάρτηση της τελικής θέσης του περιγράμματος από την αρχική του θέση. Η απάντηση είναι ότι η αρχική θέση του περιγράμ-



Σχήμα 5.2: Στο σχήμα βλέπουμε το διάνυσμα u^{n+1} που προέκυψε μετά από μία επανάληψη του ταχέως αλγορίθμου για την εξέλιξη των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων με $\tau = 10^5$. Διακρίνουμε την παρουσία $3-4$ ιδιοδιανυσμάτων που είναι πολύ σημαντικά στην κατάτμηση.

ματος καθορίζει τους συντελεστές που θα έχουν οι συνιστώσες του u^n που αντιστοιχούν σε κάθε ιδιοδιάνυσμα. Αυτό είναι και το σημείο που διαφοροποιεί τον αλγόριθμο εξέλιξης των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων από τις μεθόδους τομής γράφων.

5.6 Πειράματα και συγκρίσεις

Αυτή η ενότητα συμπληρώνει τη θεωρητική συζήτηση που προηγήθηκε για τους διάφορους αλγορίθμους που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εξέλιξη γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων. Όλα τα πειράματα έγιναν στο υπολογιστικό σύστημα που περιγράφεται στο Παράρτημα Α΄. Ως μοντέλο γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση (5.2) με τη g να δίνεται από τη σχέση

$$g = g(\|\nabla I\|) = \exp\big(-\frac{\|\nabla I_{s_0}\|}{\sigma}\big), \qquad (5.12)$$

με παράμετρο κανονικοποίησης $s_0 = 1.0$ και παράμετρο αντίθεσης $\sigma = 0.001$ σε όλα τα πειράματα που ακολουθούν. Σε όλα τα πειράματα πλην του τελευταίου χρησιμοποιήθηκε η έκδοση του αλγορίθμου χωρίς τη μέθοδο πολλαπλών αναλύσεων. Οι διαστάσεις του χωρικού πλέγματος είναι παντού $h_x = h_y = 1$. Πρέπει να σημειωθεί ότι δεν έχουμε ακόμα πειραματικά αποτελέσματα για το AOS σχήμα.

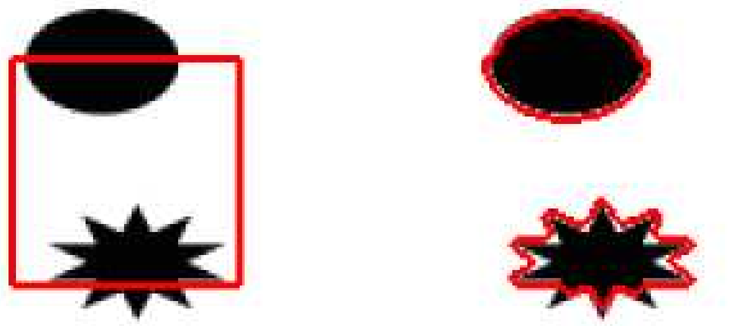
Πείραμα 1:
Καταρχήν μετράμε το χρόνο εκτέλεσης για τον αλγόριθμο της ενότητας 5.3. Μας ενδιαφέρουν τόσο οι απόλυτες χρονικές τιμές, όσο και η εξάρτηση του χρόνου εκτέλεσης από το μέγεθος του προβλήματος. Ο πίνακας 5.1 μας δίνει το χρόνο που απαιτείται για την εκτέλεση του αλγορίθμου σε συνάρτηση με το μέγεθος της εικόνας (σε υπολογιστή Pentium 700 MHz). Ένα βήμα του αλγορίθμου ήταν αρκετό για να φτάσουμε στην τελική κατάσταση σε όλες τις περιπτώσεις. Ο χρόνος εκτέλεσης (CPU time, περιλαμβάνει input-output) έχει με καλή προσέγγιση γραμμική εξάρτηση από το μέγεθος του προβλήματος (ο αριθμός των pixels της εικόνας). Αυτό το περιμέναμε γιατί το πιο ακριβό τμήμα του αλγορίθμου είναι η επίλυση του γραμμικού προβλήματος με τεχνικές πολλαπλών πλεγμάτων, που, όπως είδαμε στην ενότητα 4.6, έχει κόστος ανάλογο του μεγέθους του προβλήματος.

Πείραμα 2:
Το επόμενο πείραμα που παραθέτουμε στο σχήμα 5.3 αφορά τη συμπεριφορά του μοντέλου των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων όταν η αρχική καμπύλη δεν είναι εντελώς έξω από τα αντικείμενα που μας ενδιαφέρουν. Παρατηρούμε ότι η καμπύλη μας καταφέρνει να βρει το επιθυμητό περίγραμμα. Αυτό συμβαίνει

Μέγεθος	#pixels ($\times 10^4$)	Χρόνος (sec)
100×100	1.0	0.61
256×256	6.6	3.65
512×512	26.2	13.6

Πίνακας 5.1: Η ταχύτητα της μεθόδου πολλαπλών πλεγμάτων σε συνάρτηση με το μέγεθος της εικόνας για γεωδαιτικά ενεργά περιγράμματα. Χρησιμοποιήσαμε την ίδια εικόνα σε διαφορετικά μεγέθη. Σε κάθε περίπτωση χρειάστηκε μόνο μία επανάληψη.

επειδή δεν χρησιμοποιούμε κάποια balloon force που θα επέτρεπε την κίνηση του περιγράμματος μόνο προς τα μέσα ή μόνο προς τα έξω.



Αρχική θέση της καμπύλης   Τελική θέση (1 επ.,$\tau = 10^{10}, 0.6$sec)

Σχήμα 5.3: Η αρχική καμπύλη δεν είναι ούτε εκτός ούτε εντός των αντικειμένων. Παρόλα αυτά το περίγραμμα οδηγείται στην επιθυμητή θέση (μέγεθος της εικόνας 100×100 pixels)

Πείραμα 3:

Στη συνέχεια και στα σχήματα 5.4 και 5.5 εξετάζουμε τον αριθμό των βημάτων του αλγορίθμου που απαιτούνται για να φτάσουμε κοντά στην τελική θέση του περιγράμματος. Βλέπουμε στο σχήμα 5.4 ότι ήδη με μία μόνο επανάληψη έχουμε μια πολύ ικανοποιητική εκτίμηση της τελικής θέσης της καμπύλης. Εξαίρεση αποτελεί το αντικείμενο με τη βαθιά και στενή κοιλότητα που φαίνεται σε μεγέθυνση στο σχήμα 5.5. Για να εισέλθει το περίγραμμα στο βάθος αυτής της κοιλότητας απαιτείται άλλη μία επανάληψη. Μία τρίτη επανάληψη δεν μετακινεί περαιτέρω την καμπύλη. Είναι λοιπόν φανερό ότι μία ή το πολύ δύο επαναλήψεις αρκούν στις περισσότερες περιπτώσεις για να οδηγήσουν το περίγραμμα στην τελική του θέση. Σημειωτέον ότι όταν έχουμε περισσότερες από μία επαναλήψεις στοιχίζουν η καθεμία λιγότερο από την πρώτη επανάληψη, γιατί η δημιουργία του πίνακα συντελεστών των αγνώστων για τα πιο τραχειά πλέγματα του αλγεβρικού multigrid απαιτείται μόνο κατά την πρώτη επανάληψη. Έτσι στο σχήμα 5.4 βλέπουμε ότι η πρώτη επανάληψη κοστίζει περίπου 4 φορές περισσότερο από τις επόμενες.

Αρχική θέση της καμπύλης

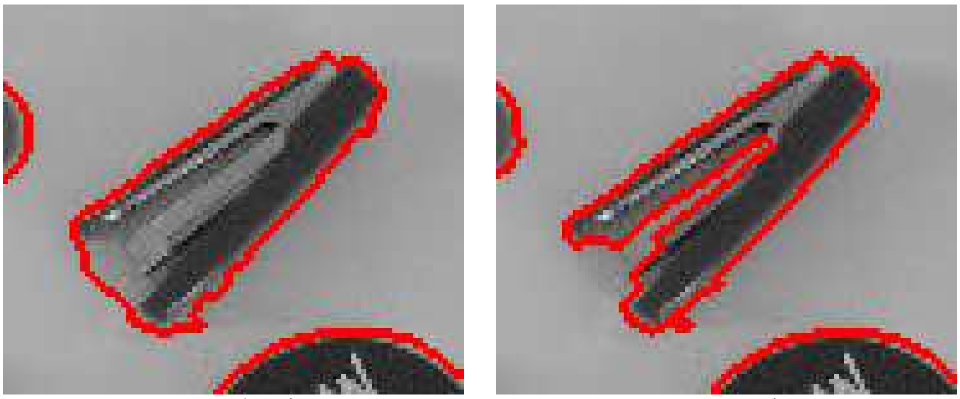
1 επανάληψη ($\tau = 10^{10}, 4.4\text{sec}$)

2 επαναλήψεις ($\tau = 10^{10}, 5.5\text{sec}$)

3 επαναλήψεις ($\tau = 10^{10}, 6.4\text{sec}$)

Σχήμα 5.4: Πόσες επαναλήψεις απαιτούνται για να φτάσουμε στην τελική θέση του περιγράμματος; Δείχνουμε τα αποτελέσματα του αλγορίθμου ύστερα από $1, 2$ και 3 επαναλήψεις. Παραθέτουμε επίσης το χρόνο που απαιτήθηκε για την εκτέλεση σε κάθε περίπτωση. Το μέγεθος της εικόνας είναι 320×240 pixels

Πείραμα 4:
Κατόπιν στο σχήμα 5.6 δείχνουμε το μηχανισμό λειτουργίας του αλγορίθμου όταν συνδυάζεται με τις τεχνικές στενής ζώνης και πολλαπλών αναλύσεων που συζητήσαμε στην ενότητα 5.4. Βλέπουμε στο σχήμα την πυραμίδα 4 επιπέδων που έχουμε δημιουργήσει για την εικόνα "Νόμισμα και Γυαλιά" διάστασης



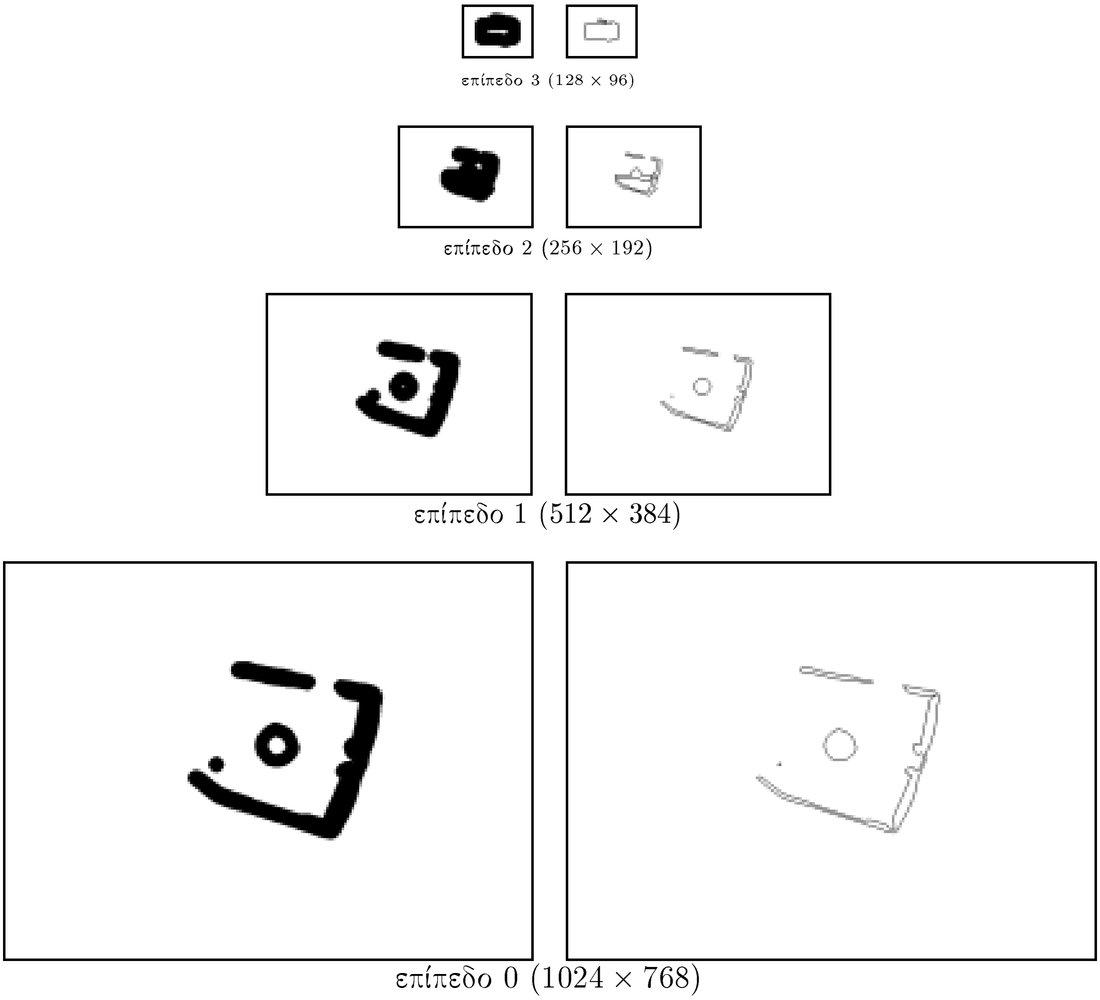
1 επανάληψη 2 επαναλήψεις

Σχήμα 5.5: Λεπτομερής άποψη των αποτελεσμάτων του σχήματος 5.4 ύστερα από μία και δύο επαναλήψεις. Έχουμε επικεντρώσει την προσοχή μας σε ένα αντικείμενο που εμφανίζει μια βαθιά και στενή κοιλότητα. Απαιτούνται δύο επαναλήψεις για να εισέλθει το περίγραμμα εντός της κοιλότητας.

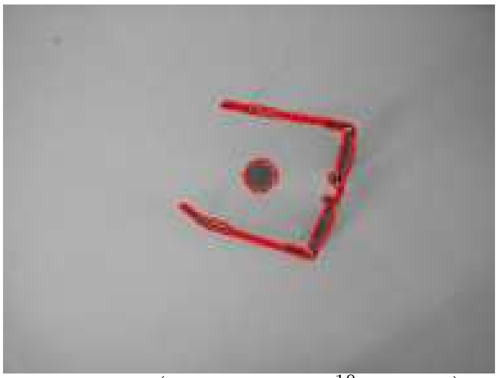
1024×768 pixels. Εξελίσσουμε το περίγραμμα καταρχήν στο πιο τραχύ επίπεδο (επίπεδο 3). Κατόπιν μεταφέρουμε προς τα πιο λεπτομερή επίπεδα το περίγραμμα που έχουμε βρει. Σε κάθε νέο επίπεδο τρέχουμε ξανά τον αλγόριθμο προκειμένου το περίγραμμα να προσαρμοστεί στις λεπτομέρειες της εικόνας του νέου επιπέδου. Επειδή σε κάθε νέο επίπεδο είμαστε κοντά στην τελική θέση της καμπύλης, αρκεί να τρέξουμε τον αλγόριθμο εντός μιας στενής ζώνης γύρω από την αρχική θέση του περιγράμματος. Βλέπουμε ότι πετυχαίνουμε αξιοσημείωτη επιτάχυνση της διαδικασίας με αυτόν τον τρόπο, αφού απαιτούνται 10.2 sec για την εξέλιξη του περιγράμματος αντί για ≈ 40 που θα περιμέναμε για εικόνα αυτού του μεγέθους με βάση τα αποτελέσματα του πίνακα 5.1. Από την άλλη πλευρά, όμως, παρατηρούμε ότι ο δεξιός βραχίονας των γυαλιών στο σχήμα 5.6 δεν ανιχνεύεται σωστά, γιατί στην πιο λεπτομερή κλίμακα οι ακμές του αντικειμένου δεν είναι ιδιαίτερα έντονες. Αναμένουμε ότι θα αποφεύγαμε αυτό το φαινόμενο αν κάναμε χρήση μορφολογικών πυραμίδων αντί της γραμμικής πυραμίδας που χρησιμοποιούμε τώρα στην υλοποίησή μας.

Πείραμα 5:

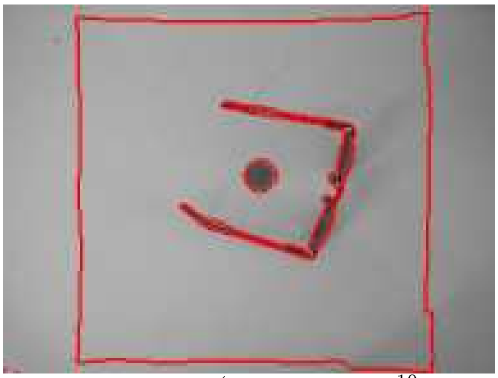
Τέλος, στο σχήμα 5.7 δείχνουμε την ακαταλληλότητα του σχήματος Crank-Nicholson για την περίπτωση εξέλιξης γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων με πολύ μεγάλο τ. Χρησιμοποιώντας το σχήμα Crank-Nicholson οδηγούμαστε σε λύση που εμφανίζει έντονες ταλαντώσεις. Αυτές οι ταλαντώσεις οδηγούν στην εμφάνιση νέων περιγραμμάτων που καμία σχέση δεν έχουν με το συνεχές μοντέλο. Αντίθετα βλέπουμε ότι το implicit σχήμα εμφανίζει πολύ καλύτερη συμπεριφορά.



Σχήμα 5.6: Συνδυασμός του ταχύ αλγορίθμου για γεωδαιτικά ενεργά περιγράμματα με τεχνικές ανάλυσης σε πολλαπλές κλίμακες και τεχνικές στενής ζώνης. Στην αριστερή στήλη βλέπουμε τη στενή ζώνη και στη δεξιά στήλη βλέπουμε την εξέλιξη της καμπύλης καθώς προχωράμε από τα πιο ψηλά επίπεδα της πυραμίδας στα πιο χαμηλά. Η εικόνα έχει διαστάσεις 1024×768 pixels. Η διαδικασία ολοκληρώθηκε σε 10.2 sec ($\tau = 10^{10}$).



implicit, (1 επ. $\tau = 10^{10}, 4.3$sec)



Crank-Nicholson, (1 επ. $\tau = 10^{10}, 4.3$sec)

Σχήμα 5.7: Συγκριτικά αποτελέσματα των σχημάτων implicit και Crank-Nicholson για μία επανάληψη του αλγορίθμου ταχείας εξέλιξης των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων με $\tau = 10^{10}$. Βλέπουμε πως το σχήμα Crank-Nicholson οδηγεί στην εμφάνιση νέων περιγραμμάτων που προέρχονται από ισχυρές ταλαντώσεις της συνάρτησης ενσωμάτωσης και καμία σχέση δεν έχουν με το συνεχές μοντέλο. (Διαστάσεις εικόνας 320×240 pixels)

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα

6.1 Συμβολή της διπλωματικής εργασίας

Η πρωτότυπη συνεισφορά της παρούσας διπλωματικής εργασίας βρίσκεται κυρίως στα ακόλουθα σημεία:

- Χρήση του implicit αριθμητικού σχήματος και μεθόδων πολλαπλών πλεγμάτων στην επίλυση του προβλήματος των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων. Ο αλγόριθμος που προκύπτει είναι ίσως ο πιο γρήγορος αλγόριθμος για την εξέλιξη γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων που είναι γνωστός σήμερα στη βιβλιογραφία.

- Συσχέτιση του μοντέλου των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων με τις μεθόδους τομής γράφων μέσω της θεωρητικής ανάλυσης του αλγορίθμου για την ταχεία εξέλιξη γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων. Η συσχέτιση αυτή από τη μια μεριά ισχυροποιεί τον αλγόριθμο που προτείνουμε και από την άλλη μεριά αποδεικνύει ότι οι δυο μεθοδολογίες για την κατάτμηση εικόνων, αν και είναι φαινομενικά διαφορετικές μεταξύ τους, στηρίζονται πάνω στις ίδιες βασικές αρχές.

- Ανάλυση και σύγκριση της συμπεριφοράς του implicit σχήματος και του σχήματος Crank-Nicholson σε συνδυασμό με μεθόδους πολλαπλών πλεγμάτων στο πρόβλημα της ανισοτροπικής διάχυσης.

Αυτά τα σημεία της εργασίας μας σκοπεύουμε να τα διερευνήσουμε περαιτέρω και να τα δημοσιεύσουμε.

Πέρα από τα παραπάνω στοιχεία πρωτοτυπίας της, η εργασία αυτή κινήθηκε και στις ακόλουθες κατευθύνσεις:

- Ανασκόπηση των μοντέλων ανισοτροπικής διάχυσης και γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων.

- Παρουσίαση βασικών μεθόδων αριθμητικής ανάλυσης για μερικές διαφορικές εξισώσεις, με έμφαση στην ανάλυση ευστάθειας με τη μέθοδο του πίνακα και στα αριθμητικά σχήματα που χρησιμοποιούνται ευρέως για την εξέλιξη επιπεδοσυνόλων.

- Παρουσίαση της συσχέτισης μεταξύ της εξίσωσης ανισοτροπικής διάχυσης και της εξίσωσης εξέλιξης των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων. Αυτή η συσχέτιση επιτρέπει τη χρήση των ίδιων αριθμητικών σχημάτων και στις δύο περιπτώσεις.

- Ανάλυση της συμπεριφοράς των αριθμητικών σχημάτων που χρησιμοποιούμε για την ανισοτροπική διάχυση και για τα γεωδαιτικά ενεργά περιγράμματα με μεθόδους βασισμένες στις φασματικές ιδιότητες του πίνακα επανάληψης.

- Εξοικίωση με σύγχρονα αριθμητικά πακέτα για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων μερικών διαφορικών εξισώσεων.

6.2 Κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα

Η έρευνά μας γύρω από τα θέματα που εξετάσαμε προφανώς και δεν έχει ολοκληρωθεί μέσα στα στενά πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Μερικά από τα ερωτήματα που δεν έχουν ακόμα απαντηθεί και οι κατευθύνσεις τις οποίες σχεδιάζουμε να ακολουθήσουμε είναι τα εξής:

- *Πώς συγκρίνεται η μέθοδος που προτείνουμε για την ταχεία εξέλιξη των γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων με αντίστοιχους αλγορίθμους βασισμένους στο AOS σχήμα της ενότητας 4.4;*
  Σκοπεύουμε να υλοποιήσουμε τον αλγόριθμο που βασίζεται στο AOS σχήμα και να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα.

- *Μπορούμε να αποδείξουμε θεωρητικά ότι ο αλγόριθμος που προτείνουμε για την ταχεία εξέλιξη γεωδαιτικών ενεργών περιγραμμάτων συγκλίνει στο ίδιο περίγραμμα με το συνεχές μοντέλο; Ποιές είναι οι προϋποθέσεις για να ισχύει αυτό;*
  Διαισθητικά αναμένουμε τα περιγράμματα που αποτελούν σταθερά σημεία του αλγορίθμου μας να είναι και σταθερά σημεία του συνεχούς μοντέλου (όχι όμως απαραίτητα και το αντίστροφο). Δεν έχουμε όμως μέχρι τώρα καταφέρει να αποδείξουμε μια ανάλογη πρόταση.

- *Πώς μπορούμε να εισάγουμε τον όρο που αντιστοιχεί στο balloon force της εξίσωσης* (1.11) *(κίνηση τύπου dilation/erosion) στον ταχύ αλγόριθμο*

που προτείνουμε με τρόπο που να διατηρείται η ευστάθεια του αλγορίθμου δίχως περιορισμούς στο χρονικό βήμα;
Σχεδιάζουμε να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο ταχείας προέλασης για να χειριστούμε αυτόν τον όρο. Δεν έχουμε όμως ακόμα προχωρήσει στην υλοποίηση για να διαθέτουμε πειραματικά αποτελέσματα.

- *Έχουμε κάποιο όφελος αν χρησιμοποιήσουμε μορφολογικές πυραμίδες στη μέθοδο πολλαπλών αναλύσεων της ενότητας 5.4;*
Πρόκειται να υλοποιήσουμε σύντομα τέτοιες μορφολογικές πυραμίδες και να εξετάσουμε τη συμπεριφορά τους.

- *Υπάρχουν περιθώρια περαιτέρω μείωσης του χρόνου επίλυσης του αλγεβρικού συστήματος σε κάθε βήμα του αλγορίθμου;*
Ο κώδικας του αλγεβρικού multigrid έχει μια σειρά από παραμέτρους (π.χ. επιθυμητή ακρίβεια) που δεν έχουμε ως τώρα εξετάσει πώς επηρεάζουν την ταχύτητα εκτέλεσης και την ποιότητα της λύσης.

- *Μπορούμε να προχωρήσουμε περαιτέρω τη συσχέτιση με τις μεθόδους τομής γράφων;*
Σκοπεύουμε καταρχήν να πάρουμε κάποια πειραματικά αποτελέσματα, υπολογίζοντας τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A. Με βάση τη διαίσθηση που θα αποκτήσουμε θα καθορίσουμε τα περαιτέρω βήματα της διερεύνυσής μας.

Αυτά τα ερωτήματα θα απασχολήσουν την έρευνά μας στο μέλλον.

Παράρτημα Α΄

Λεπτομέρειες Υλοποίησης

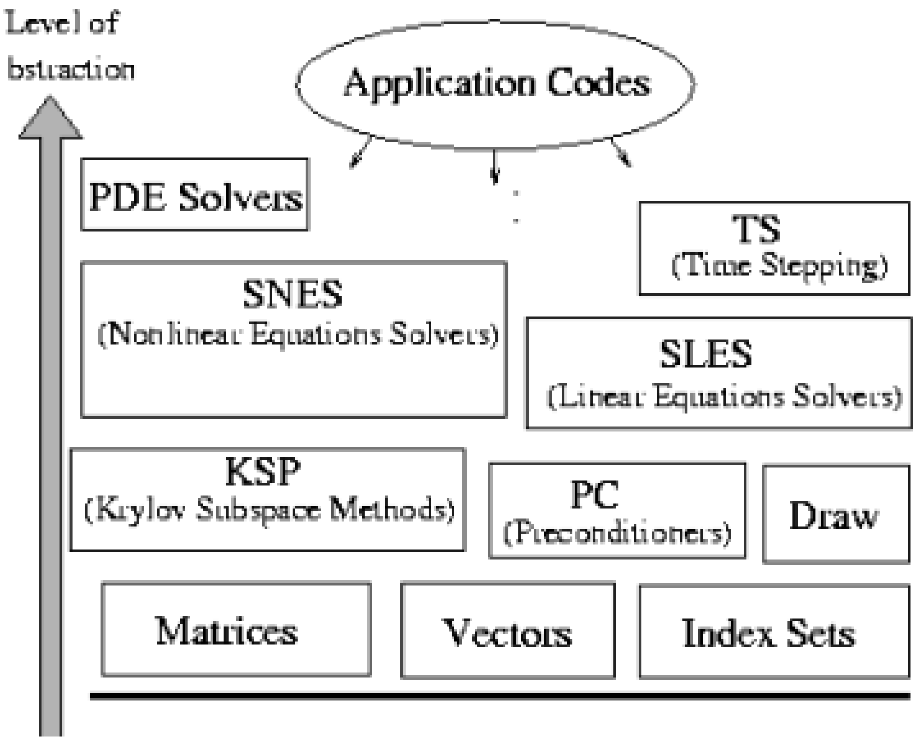
Η αριθμητική επίλυση μοντέλων μερικών διαφορικών εξισώσεων με τρόπο αποδοτικό και ευέλικτο είναι συχνά αρκετά δύσκολη υπόθεση. Η υλοποίηση των μεθόδων που εξετάσαμε στα προηγούμενα Κεφάλαια αποτελεί σημαντικό κομμάτι της παρούσας εργασίας και συνέβαλε αποφασιστικά στη διαδικασία εξαγωγής θεωρητικών συμπερασμάτων. Στο Παράρτημα αυτό θα δώσουμε μια συνοπτική περιγραφή των βασικών υπολογιστικών εργαλείων που χρησιμοποιήσαμε και μας διευκόλυναν κατά την υλοποίηση και τον πειραματικό έλεγχο των αλγορίθμων που παρουσιάζουμε στην παρούσα εργασία.

Α΄.1 PETSc: Μια συλλογή εργαλείων για την επίλυση PDEs

Το *PETSc (Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation)* ([6]) είναι μια ελεύθερα διαθέσιμη συλλογή λογισμικού για την αριθμητική επίλυση σε υπολογιστικά συστήματα με έναν ή περισσότερους επεξεργαστές μερικών διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν από τη μοντελοποίηση προβλημάτων μεγάλης κλίμακας. Η συλλογή αυτή περιλαμβάνει μια πληθώρα από δομές δεδομένων και ρουτίνες που είναι αναγκαίες για την επίλυση προβλημάτων μερικών διαφορικών εξισώσεων. Στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε πολλούς επεξεργαστές, η επικοινωνία μεταξύ τους βασίζεται στο πρότυπο MPI ([27]). Το PETSc αναπτύσσεται και εξελίσσεται από το Argonne National Laboratory.

Το PETSc παρέχει ένα μεγάλο αριθμό από ρουτίνες για την επίλυση γραμμικών και μη-γραμμικών συστημάτων από εξισώσεις, καθώς και μια ποικιλία από χρονικούς ολοκληρωτές (time integrators). Επίσης παρέχει πολλές μεθόδους που διευκολύνουν το γράψιμο και τον έλεγχο παράλληλων προγραμμάτων. Αυτή η υποδομή μπορεί να χρησιμοποιηθεί από προγράμματα εφαρμογών γραμμένα σε C, C++ ή Fortran.

Η βιβλιοθήκη αυτή έχει ιεραρχική δομή, που απεικονίζεται στο σχήμα Α′.1. Ο κάθε χρήστης, ανάλογα με τις απαιτήσεις της εφαρμογής που θέλει να υλοποιήσει, μπορεί να χρησιμοποιήσει μεθόδους του επιπέδου αφαίρεσης που τον βολεύει περισσότερο. Αν και το PETSc είναι γραμμένο σε γλώσσα C, χρησιμοποιεί σε μεγάλο βαθμό τεχνικές αντικειμενοστρεφή προγραμματισμού[1]. Έτσι, κάθε module του σχήματος Α′.1 χειρίζεται αντικείμενα ενός τύπου (π.χ. πίνακες) και έχει παρόμοια λειτουργικότητα με μία κλάση του αντικειμενοστρεφή προγραμματισμού, περιλαμβάνοντας τόσο δομές δεδομένων, όσο και μεθόδους για το χειρισμό των αντικειμένων.



Σχήμα Α′.1: Η ιεραρχία του PETSc

Καθένα από τα modules του PETSc αποτελείται από μια αφηρημένη διεπαφή και από μία ή περισσότερες υλοποιήσεις της. Αυτή η σχεδίαση, βασισμένη στην ιδέα του πολυμορφισμού της αντικειμενοστρεφής μεθοδολογίας, επιτρέπει την εύκολη σύγκριση μεταξύ διαφορετικών αλγορίθμων (π.χ. τη σύγκριση μεταξύ των explicit, implicit και Crank-Nicholson σχημάτων στη δική μας ερ-

[1] Η επιλογή της γλώσσας C έγινε για να επιτευχθεί η όσο το δυνατόν μεγαλύτερη φορητότητα της βιβλιοθήκης, καθώς μεταγλωττιστές που υλοποιούν το ANSI C πρότυπο υπάρχουν σχεδόν για όλα τα σημαντικά υπολογιστικά συστήματα.

γασία). Επιτρέπει επίσης την εύκολη επέκταση της βιβλιοθήκης, καθώς και την ενσωμάτωση σε αυτήν εξωτερικών ρουτινών.

Ο κώδικας amg1r5

Μια τέτοια εξωτερική ρουτίνα είναι και ο κώδικας amg1r5 για την επίλυση γραμμικών συστημάτων με αλγεβρικές μεθόδους πολλαπλών πλεγμάτων που χρησιμοποιήσαμε στα πειράματα αυτής της εργασίας για να επιλύσουμε το αραιό γραμμικό σύστημα που προκύπτει από την εφαρμογή των σχημάτων implicit και Crank-Nicholson. Ο ελεύθερα διαθέσιμος (αλλά copyrighted) κώδικας amg1r5 [63], είναι γραμμένος σε Fortran77. Το PETSc έχει ένα interface που επιτρέπει την εύκολη χρήση του κώδικα amg1r5.

Α΄.2 Πειραματικές Συνθήκες

Για να αξιολογηθούν καλύτερα οι μετρήσεις επίδοσης των Κεφαλαίων 4 και 5, παραθέτουμε εδώ κάποιες λεπτομέρειες του υπολογιστικού συστήματος που χρησιμοποιήσαμε.

Ο υπολογιστής που χρησιμοποιήσαμε στα πειράματα είχε επεξεργαστή Intel Pentium 2 (Celeron) με συχνότητα ρολογιού 700 MHz, μνήμη cache 128 KB και κύρια μνήμη 384 MB. Το λειτουργικό σύστημα ήταν το SuSe Linux 8.1 με έκδοση πυρήνα 2.4.19. Το πρόγραμμα εφαρμογής γράφτηκε σε C++. Για τη μεταγλώττιση του προγράμματος εφαρμογής, καθώς και της βιβλιοθήκης PETSc και της ρουτίνας amg1r5 χρησιμοποιήθηκε ο gcc version 3.2, με ενεργοποιημένη τη σημαία βελτιστοποίησης (-O).

Βιβλιογραφία

[1] S.T. Acton. Multigrid anisotropic diffusion. *IEEE Trans. on Image Processing*, 7(3):280–291, Μάρτιος 1998.

[2] D. Adalsteinsson και J. A. Sethian. A fast level set method for propagating interfaces. *Journal of Computational Physics*, 118(2):269–277, 1995.

[3] D. Adalsteinsson και J. A. Sethian. The fast construction of extension velocities in level set methods. *Journal of Computational Physics*, 148(1):2–22, 1999.

[4] L. Alvarez, P.L. Lions και J.M. Morel. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion, ii. *SIAM Journal Numer. Anal.*, 29(3):845–866, 1992.

[5] W. Ames. *Numerical Methods for Partial Differential Equations.* Academic Press, 3η έκδοση, 1992.

[6] Satish Balay, William D. Gropp, Lois C. McInnes και Barry F. Smith. Petsc users manual. Τεχνική Αναφορά υπ. αρίθμ. ANL-95/11 - Revision 2.1.5, Argonne National Laboratory, 2003.

[7] D. Barash, M. Israeli και R. Kimmel. An accurate operator splitting scheme for nonlinear diffusion filtering. χ.χ.

[8] A. Blake και M. Isard. *Active Contours: The Appli cation of Techniques from Graphics, Vision, Control Theory and Statistics to Visual Tracking of Shapes in Motion.* Springer-Verlag, 1997.

[9] A. Blake και A. Zisserman. *Visual Reconstruction.* MIT Press, 1987.

[10] M. Born και E. Wolf. *Principles of Optics.* Pergamon Press, Oxford, England, 2η έκδοση, 1987.

[11] W. Briggs. A multigrid tutorial. Tutorial presented at the 3rd Copper Mountain Conf. on Multigrid Methods, Απρίλιος 1987.

[12] W. L. Briggs, V. E. Henson και S. F. McCormick. *A Multigrid Tutorial.* SIAM Books, Philadelphia, 2η έκδοση, 2000.

[13] P.J. Burt και E.H. Adelson. The laplacian pyramid as a compact image code. *IEEE Trans. on Communications*, 31(4):532–540, Απρίλιος 1983.

[14] V. Caselles, R. Kimmel και G. Sapiro. Geodesic active contours. *Int. Journal of Comp. Vision*, 22(1):61–79, Φεβρουάριος 1997.

[15] V. Caselles, J.M. Morel, G. Sapiro και A. Tannenbaum. Introduction to the special issue on partial-differential equations and geometry-driven diffusion in image-processing and analysis. *IEEE Trans. on Image Processing*, 7(3):269–273, Μάρτιος 1998.

[16] F. Catte, P.L. Lions, J.M. Morel και T. Coll. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM Journal Numer. Anal.*, 29(1):182–193, 1992.

[17] J.L. Chen και A. Kundu. Unsupervised texture segmentation using multichannel decomposition and hidden markov-models. *IEEE Trans. on Image Processing*, 4(5):603–619, Μάιος 1995.

[18] Y. Chen, Y. Giga και S. Goto. Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations. *Journal of Diff. Geometry*, 33:749, 1991.

[19] D.L. Chopp. Computing minimal surfaces via level set curvature flow. *Journal of Computational Physics*, 106:77–91, 1993.

[20] T. Cormen, C. Leiserson και R. Rivest. *Introduction to Algorithms.* MIT Press, 1990.

[21] R. Courant και D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics.* Wiley, New York, 1953.

[22] M.G. Crandall, H. Ishii και P. L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bulletin of the AMS*, 27(1):1–67, 1992.

[23] I.S. Duff, J.K. Reid και A.M. Erisman. *Direct methods for sparse matrices.* Cambridge University Press, 1986.

[24] G. Evans, J. Blackledge και P. Yardley. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, London, 1999.

[25] L.C. Evans και J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature, i. *J. of Diff. Geometry*, 33:635, 1991.

[26] D.A. Forsyth και J. Ponce. *Computer Vision: A Modern Approach*. Prentice-Hall, 2003.

[27] MPI Forum. Mpi: a message-passing interface standard. *International Journal of Supercomputer Applications and high performance Computing*, 8(3/4):159–416, 1994.

[28] S. Geman και D. Geman. Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(6):721–741, Νοέμβριος 1984.

[29] R. Goldenberg, R. Kimmel, E. Rivlin και M. Rudzsky. Fast geodesic active contours. *IEEE Trans. on Image Processing*, 10:1467–1475, 2001.

[30] G.H. Golub και C. Van Loan. *Matrix Computations*. John Hopkins Press, 1996.

[31] J. Gomes και O.D. Faugeras. Reconciling distance functions and level sets. 11(2):209–223, Ιούνιος 2000.

[32] J. Goutsias και H.J.A.M. Heijmans. Nonlinear multiresolution signal decomposition schemes–part i: Morphological pyramids. *IEEE Trans. on Image Processing*, 9(11):1862–1876, Νοέμβριος 2000.

[33] M. Grayson. The heat equation shrinks embedded plane curves to round points. *Journal of Diff. Geometry*, 26:285, 1987.

[34] U. Grenander. *General Pattern Theory*. Oxford Univ. Press, 1993.

[35] U. Grenander, Y. Chow και D. M. Keenan. *Hands: a pattern theoretic study of biological shapes*. Springer-Verlag New York, 1991.

[36] F. Guichard και J. M. Morel. Partial differential equations and image iterative filtering. Στο *The state of the art in numerical analysis*, επιμελητές: I. S. Duff και G. A. Watson, τόμος 63, σελίδες 525–562. Oxford University Press, 1997.

[37] W. Hackbusch. *Multigrid methods and applications*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[38] H.J.A.M. Heijmans και J. Goutsias. Nonlinear multiresolution signal decomposition schemes–part ii: Morphological wavelets. *IEEE Trans. on Image Processing*, 9(11):1897–1913, Νοέμβριος 2000.

[39] B.K.P. Horn και M.J. Brooks. *Shape from Shading*. MIT Press, 1989.

[40] B.K.P. Horn και B.G. Schunck. Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, 17(1-3):185–203, Αύγουστος 1981.

[41] R.A. Hummel. Representations based on zero-crossings in scale-space. Στο *IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*, σελίδες 204–209, 1986.

[42] F. John. *Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1982.

[43] G. Kanizsa. *Organization in Vision: Essays on Gestalt Perception*. Praeger, New York, 1979.

[44] M. Kass, A.P. Witkin και D. Terzopoulos. Snakes: Active contour models. *Int. Journal of Comp. Vision*, 1(4):321–331, Ιανουάριος 1988.

[45] K. Keeler. Map representations and coding-based priors for segmentation. Στο *IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*, σελίδες 420–425, 1991.

[46] J.J. Koenderink. The structure of images. *Biol. Cybern.*, 50:363–370, 1984.

[47] K. Koffka. *Principles of Gestalt Psychology*. Harcourt, Brace and Co, New York, 1935.

[48] I. Laptev και T. Lindeberg. Tracking of multi-state hand models using particle filtering and a hierarchy of multi-scale image features. Στο *Int. Conf. on Scale–Space Theory*, σελίδες 63–74, 2001.

[49] P. Maragos. Differential morphology and image-processing. *IEEE Trans. on Image Processing*, 5(6):922–937, Ιούνιος 1996.

[50] P. Maragos. Partial differential equations in image analysis: Continuous modeling, discrete processing. Στο *Europ. Conf. on Signal Process.*, 1998.

[51] P. Maragos. *Computer Vision*. book draft, ver. 2002, NTUA, 2002.

[52] P. Maragos. Algebraic and pde approaches for lattice scale-spaces with global constraints. *Int. Journal of Comp. Vision*, 52(2-3):121–137, Μάιος 2003.

[53] T. McInerney και D. Terzopoulos. Topologically adaptable snakes. Στο *Int. Conf. on Comp. Vision*, σελίδες 840–845, 1995.

[54] D. Mumford και J. Shah. Optimal approximations by piecewise smooth functions and variational problems. *Comm. on Pure and Applied Math.*, XLII(5):577–685, 1989.

[55] S. Osher και J. A. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79:12–49, 1988.

[56] N. Paragios. *Geodesic active regions and level set methods: Contributions and applications in artificial vision.* Διδακτορική Διατριβή , INRIA, 2000.

[57] N. Paragios και R. Deriche. Geodesic active contours and level sets for the detection and tracking of moving objects. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(3):266–280, Μάρτιος 2000.

[58] D. Peng, B. Merriman, S. Osher, H. Zhao και M. Kang. A pde-based fast local level set method. *Journal of Computational Physics*, 155:410–438, 1999.

[59] P. Perona και J. Malik. Scale space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(7):629–639, Ιούλιος 1990.

[60] W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling και B. Flannery. *Numerical Recipes.* Cambridge University Press, 2η έκδοση, 1992.

[61] R. Richtmeyer και K. Morton. *Difference Methods for Initial Value Problems.* Wiley, New York, 2η έκδοση, 1967.

[62] E. Rouy και A. Tourin. A viscosity solutions approach to shape-from-shading. *SIAM Journal Numer. Anal.*, 29(3):867–884, 1992.

[63] J. W. Ruge και K. Stueben. Algebraic multigrid. Στο *Multigrid Methods*, επιμελητής: S.F. Mc Cormick. SIAM, 1987.

[64] S. Sarkar και P. Soundararajan. Supervised learning of large perceptual organization: Graph spectral partitioning and learning automata. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(5):504–525, Μάιος 2000.

[65] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology.* Academic Press, 1982.

[66] J. A. Sethian. A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 93:1591–1595, Φεβρουάριος 1996.

[67] J. A. Sethian. *Level Set Methods: Evolving Interfaces in Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science.* Cambridge University Press, 2η έκδοση, 1999.

[68] J. Shi και J. Malik. Normalized cuts and image segmentation. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(8):888–905, Αύγουστος 2000.

[69] P. Soundararajan και S. Sarkar. An in-depth study of graph partitioning measures for perceptual organization. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 25(6):642–660, Ιούνιος 2003.

[70] F. K. Sun και P. Maragos. Experiments on image compression using morphological pyramids. Στο *Proc. SPIE Visual Communications and Image Processing IV*, επιμελητής: W.A. Pearlman, τόμος 1141, σελίδες 1303–1312, Νοέμβριος 1989.

[71] M. Thurston και A. Rosenfeld. Edge and curve detection for visual scene analysis. *IEEE Trans. on Computing*, 20(5):562–569, Μάιος 1971.

[72] J.N. Tsitsiklis. Efficient algorithms for globally optimal trajectories. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 40(9):1528–1538, 1995.

[73] J. Weickert. *Anisotropic Diffusion in Image Processing.* Teubner-Verlag, 1998.

[74] J. Weickert και G. Kühne. Fast methods for implicit active contour models. Στο *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision and Graphics*, επιμελητές: S. Osher και N. Paragios. Springer, 2002.

[75] J. Weickert, B.ter Haar Romeny και M. Viergever. Efficient and reliable schemes for nonlinear diffusion filtering. *IEEE Trans. on Image Processing*, 7(3):398–410, Μάρτιος 1998.

[76] P. Wesseling. *An Introduction to Multigrid Methods.* John Wiley Sons, Chichester, 1992.

[77] A.P. Witkin. Scale-space filtering. Στο *Int. Joint Conf. on Artificial Intel.*, σελίδες 1019–1022, 1983.